

*Master Analyse Stratégique, Industrielle et Financière
ESD208 : Incitations et Design Economique*

le cnam

Les mécanismes d'enchères

Réalisé par :

Mohamed Amine EL AFRIT
Fatima Ezahra EL BARBOURI

Encadré par :

Professeur Jean LAINÉ

Résumé

Ce travail analyse le problème rencontré par un vendeur qui veut vendre un bien ou service à des acheteurs. Naturellement, le vendeur souhaite vendre son produit pour maximiser son profit en vendant le bien à l'acheteur prêt à payer plus cher que les autres. Il s'agit du problème d'enchère d'acheteurs. Plus généralement, une enchère est définie comme « *un mécanisme par lequel un agent unique met en concurrence d'autres agents en vue de leur vendre ou de leur acheter un produit (un bien, un service, ou un ensemble de biens et ou de services)* » [6].

On peut voir l'enchère comme outil qui sert dans un premier temps à trouver le « gâteau » le plus grand possible (**problème d'allocation**). Ensuite, dans un second temps, de partager ce « gâteau » de manière « optimale » (**problème de distribution**).

Nous allons étudier, au chapitre 2, le problème d'allocation à travers deux exemples de mécanismes d'enchères dans lesquels les acheteurs **rationnels** seront plus ou moins **incités** à révéler leur vraie valorisation du produit. L'objectif de ce problème est d'avoir le plus grand « gâteau ».

On ne détaillera pas le problème de distribution mais on en parlera rapidement au chapitre 3 pour citer les références et résultats permettant de l'approfondir ailleurs.

Notre approche ici se base sur la modélisation du problème par un jeu bayésien statique à information incomplète. On comparera les enchères sous pli-scellé au premier prix et au second prix.

On constate que « révéler les dispositions à payer » est un équilibre de Nash Bayésien dans une enchère au second prix. Autrement dit, l'enchère second prix est un mécanisme qui incite les acheteurs à révéler leur dispositions à payer.

Mots clefs : Enchère, théorie des jeux, équilibre de Nash Bayésien, enchère de Vickrey.

Table des matières

Chapitre 1 Introduction	2
1.1 Motivation de l'étude des enchères	2
1.2 Problématiques	3
1.2.1 Problème d'allocation : efficacité sociale	3
1.2.2 Problème de distribution : maximisation de profit	3
1.3 Typologies des enchères	4
1.4 Les différents approches du problème	5
1.5 Critères d'évaluation des enchères	5
1.5.1 Garantie de révélation de l'information	5
1.5.2 Garantie d'un revenu maximum pour le vendeur	5
1.5.3 Garantie de facilité de mise en place du système d'enchère	5
Chapitre 2 Problème d'allocation : efficacité sociale	6
2.1 Formalisation du problème	6
2.1.1 Notations utilisées	8
2.1.2 Hypothèses	8
2.2 Les enchères au premier prix	8
2.3 Les enchères au second prix	9
2.4 Les propriétés incitatives des procédures d'enchère	10
2.4.1 Les équilibres en stratégies dominantes	10
2.4.2 Les équilibres de Nash	10
Chapitre 3 Problème de distribution : maximisation du profit	11
3.1 Description du problème	11
3.2 Théorème d'équivalence des revenus	11
Chapitre 4 Conclusion et perspectives	12
Glossaire	13
Bibliographie	14



Introduction

Sommaire

1.1 Motivation de l'étude des enchères	2
1.2 Problématiques	3
1.2.1 Problème d'allocation : efficacité sociale	3
1.2.2 Problème de distribution : maximisation de profit	3
1.3 Typologies des enchères	4
1.4 Les différents approches du problème	5
1.5 Critères d'évaluation des enchères	5
1.5.1 Garantie de révélation de l'information	5
1.5.2 Garantie d'un revenu maximum pour le vendeur	5
1.5.3 Garantie de facilité de mise en place du système d'enchère	5

Résumé : Dans ce chapitre nous allons introduire les procédures d'enchère¹ et d'e-Enchère². Nous parlerons aussi des outils permettant de mesurer l'efficacité³ des enchères.

1.1 Motivation de l'étude des enchères

En 1996 il commence⁴ à apparaître des mécanismes d'enchère sur internet comme celui d'e-bay (Auction Web). Le business model de Google par exemple, se base essentiellement sur un mécanisme d'enchère appelé « *enchère de position* ». Connue sous le nom « Sponsored Search Auction SSA » ou « Keyword Auction », c'est une enchère second prix généralisé⁵ permettant de tarifier des mots clés et de les vendre. En 2006, ce mécanisme d'enchère était à l'origine de 98% du chiffre d'affaire de Google [7] [16]. Le moteur de recherche lance son algorithme d'enchère à chaque recherche effectuée par les internautes et positionne les publicités en fonction de plusieurs paramètres. Les biens (ou plutôt les services) que Google met en enchère sont les positions des publicités sur la page de résultat de recherche. Plus la position est facile à atteindre par l'internaute, plus la publicité qui sera dedans aura de chance pour lui intéresser et plus cette position intéressera donc les publicitaires qui vont la valoriser plus ou moins élevé.

Voici d'autres exemples d'application des enchères :

- Dans les télécommunications on trouve les ventes aux enchères des fréquences radio.
- Dans le domaine financier on trouve par exemple l'introduction en bourse et vente des bons de trésor.
- Les enchères des options : l'option réelle donne le droit, et non l'obligation, à son détenteur de prendre une décision dans un contexte d'incertitude où l'information sur un projet d'investissement n'est pas parfaite. Par exemple cette option donne le droit de différer ou d'abandonner ou de contracter un projet d'investissement [5].

1. cf. Glossaire

2. cf. Glossaire

3. L'efficacité signifie ici la capacité à atteindre les objectifs souhaités

4. Cf. le graphique [suivant](#)

5. Generalized Second Price auction (GSP)

1.2 Problématiques

Nous nous intéressons à l'étude des enchères d'acheteurs⁶. On souhaite avoir le « gâteau » le plus grand possible et ensuite on souhaite partager ce gâteau de manière « juste »⁷. La problématique de cette étude est double. Il y a donc deux objectifs naturels :

- L'efficacité au sens de Pareto,
- La maximisation de profit.

⇒ Dans ce travail, on s'intéressera principalement au premier objectif d'efficacité sociale qu'on détaillera au chapitre 2. L'analyse de la problématique qui traite le deuxième objectif sera mentionnée brièvement dans le chapitre 3.

1.2.1 Problème d'allocation : efficacité sociale

Le premier problème à résoudre est un problème d'allocation (ou d'efficacité au sens de Pareto⁸) : comment affecter le bien à la personne qui lui attribue le plus de valeur.

Mais quelle est la relation entre la valorisation du bien aux yeux des acheteurs et la maximisation du bien être sociale ? Pour comprendre cela, on peut citer deux exemples :

- Un gouvernement veut vendre un actif à des entreprises privées [4]. L'objectif du gouvernement est de maximiser le bien être des consommateurs. Ce bien être est corrélé avec la valorisation de l'actif aux yeux des entreprises. En effet, plus l'entreprise X anticipe de faire du profit en produisant des biens utiles pour les consommateurs avec cet actif, plus X valorise l'actif. Comme l'anticipation des profits futurs et les valorisations sont des informations cachées, c'est un problème d'incitation où on souhaite connaître la valorisation de chaque acheteur pour allouer le bien vendu à l'acheteur qui le valorise plus que les autres.
- Comme mentionné dans [20] page 356 : *supposons qu'une personne 1 ait la valeur ϑ_1 la plus élevée et que la personne 2 attribue au bien une valeur un petit peu inférieure ϑ_2 . Si la personne 2 reçoit le bien, il existe une façon simple d'accroître la satisfaction des deux personnes : il suffit de transférer le bien de la personne 2 à la personne 1 et que la personne 1 paie à la personne 2 un prix compris entre ϑ_1 et ϑ_2 . Cela montre qu'attribuer le bien à quelqu'un d'autre que la personne avec la valeur la plus élevée ne peut pas être efficace au sens de Pareto.*

On cherche donc à inciter les acheteurs à révéler leur vraie disposition à payer ou au moins à se comporter de manière qui nous permettra de déduire leurs vraies dispositions à payer. On peut voir ce problème comme un problème de maximisation de la taille du gâteau. La taille du gâteau est la différence entre la disposition à payer du vendeur i notée ϑ_i et la disposition à vendre du vendeur notée ϑ_s (cf. équation 1.1).

$$\max_{i \in N} (\vartheta_i - \vartheta_s) \quad (1.1)$$

1.2.2 Problème de distribution : maximisation de profit

Le deuxième problème à résoudre est un problème de distribution (ou de maximisation de profit) : comment fixer le prix du bien vendu pour garantir le profit maximum pour le vendeur. En effet, après une allocation optimale⁹, on souhaite que le vendeur maximise son revenu. On peut voir ce problème comme problème de partage du gâteau trouvé suite à la résolution du premier problème.

Définir une enchère revient donc à définir :

6. L'étude des enchères vendeurs se fait par symétrie
 7. La justice n'est pas le sujet de la discipline de l'économie. Un économiste prendra une définition (parmi plusieurs) de la justice comme objectif et essaie de trouver un mécanisme permettant d'atteindre cet objectif

8. L'efficacité de Pareto dans ce contexte signifie que le bien soit vendu à la personne qui lui attribue la valeur la plus élevée.

9. Cet effort d'optimisation de l'allocation n'est pas gratuit. En effet, le vendeur doit payer cet effort qui lui permet de trouver le gâteau le plus grand.

1. Les règles d'allocation \Rightarrow définir qui gagne le bien.
2. Les règles de distribution \Rightarrow définir combien paye ou reçoit chaque agent.

On cherche donc un **mécanisme**¹⁰ qui permet d'atteindre les deux objectifs ou de s'en rapprocher au mieux.

Généralement quand on parle de jeux à information incomplète, il serait intéressant d'analyser le problème dans un contexte dynamique (Communication et réponse à un signal) mais ce ne sera pas notre sujet ici. L'équation 1.2 résume l'objet de cette problématique.

$$\max_p (p - v_s) \quad (1.2)$$

1.3 Typologies des enchères

La typologie des enchères est à analyser selon plusieurs dimensions :

- **Enchères d'acheteurs et enchères de vendeurs.** Les caractéristiques de ces deux types d'enchères sont symétriques :
 - Dans une *enchère d'acheteurs* il y a un seul vendeur et plusieurs acheteurs. Le vendeur veut maximiser son profit en vendant le bien à l'acheteur prêt à offrir la plus grande disposition à payer.
 - Dans une *enchère de vendeurs* il y a un seul acheteur et plusieurs vendeurs. L'acheteur veut minimiser ses coûts en achetant le bien du vendeur prêt à accepter le plus petit prix possible.
- **La valeur du bien :**
 - *Enchère à valeur privée* : la valeur de chaque offreur est indépendante de celles des autres participants dans ce cas.
 - *Enchère à valeur commune* : la valeur du bien est la même pour tous les participants dans ce cas.
- **Les règles en matière d'offre :**
 - *Enchères sous pli scellé* (appelées aussi cachées ou écrites ou statiques)
 - *Enchères au premier prix.* Dans ce cas chaque participant écrit son offre sur un papier et le met sous pli scellé. Le commissaire-priseur ouvre les enveloppes et attribue le bien à la personne qui a proposé l'offre la plus élevée. Le gagnant paye le prix qu'il a proposé.
 - *Enchères au second prix.* Comme le précédent mais le gagnant paye le deuxième plus grand prix.
 - *Enchères ouvertes* (appelées aussi orales ou dynamiques)
 - *Enchères montantes.* C'est typiquement le cas de l'*enchère anglaise* où le commissaire-priseur commence par un prix bas (généralement par le *prix de réserve*). Les acheteurs offrent successivement des prix plus élevés (généralement avec une *surenchère*¹¹ minimale). Le bien est affecté à l'acheteur qui a offert le montant le plus élevé pendant une certaine période T .
 - *Enchères descendantes.* C'est l'exemple de l'*enchère hollandaise* où le commissaire-priseur commence avec un prix élevé et le diminue progressivement jusqu'à ce que quelqu'un accepte d'acheter le bien.
- **La nature du bien :**
 - *Enchères à bien unique.* Dans ce cas, il s'agit d'un seul bien à vendre (ou à acheter).
 - *Enchères de biens multiples* ou *adjudications multiples.* Dans ce cas ce sont des biens de grandes quantités et il doit y avoir plusieurs acquéreurs. L'exemple d'émission de titres financiers rentre dans cette catégorie. Il y a deux procédures qui sont écrites pour ces enchères et elles se distinguent par le mécanisme de prix :
 - *Enchères concurrentielles* où tous les acheteurs paient le même prix qui est celui du dernier acquéreur (plus bas prix).
 - *Enchères discriminatoires* où chacun des vainqueurs paie le prix qu'il a proposé.

10. cf. Glossaire

11. cf. Glossaire

⇒ Dans ce travail, nous allons nous intéresser uniquement aux enchères d'acheteurs sous pli scellé au premier et au second prix, à bien unique, à valeurs privées. En plus on analysera ces deux enchères uniquement sous les hypothèses du paragraphe 2.1.2.

1.4 Les différents approches du problème

L'analyse des procédures d'enchères peut être approchée sous plusieurs angles de vue [14] :

- approche par la théorie des jeux où le problème est modélisé par un jeu bayésien. C'est un jeu statique à information incomplète c'est à dire qu'il y a au moins un joueur qui ne connaît pas l'utilité d'un ou de plusieurs autre(s) joueur(s). [9].
- approche par la théorie des contrats où on étudie les « enchères doubles¹² » par exemple : situation dans laquelle le vendeur et l'acheteur ont tout les deux des informations privées. Par exemple le vendeur est un employeur et l'acheteur est le salarié. [9].
- approche par la microstructure de marché : dans ce cas les enchères permettent d'expliquer les mécanismes de formation des prix sur les marchés. Cf. exemple de la bourse [18].

⇒ Dans ce travail nous allons approcher le problème par la théorie des jeux en le modélisant avec un jeu à information incomplète [9], c'est à dire un jeu Bayesian statique.

1.5 Critères d'évaluation des enchères

1.5.1 Garantie de révélation de l'information

Il s'agit de mesurer l'efficacité de révélation de l'information. C'est à dire de voir pour un joueur si le fait d'être honnête est une meilleure réponse quel que soit les réponses des autres joueurs (stratégies dominantes) ou bien c'est une meilleure réponse si les autres aussi sont honnêtes (équilibre de Nash).

1.5.2 Garantie d'un revenu maximum pour le vendeur

Pour atteindre l'objectif de vendre le bien à la personne qui valorise le plus le produit, c'est à dire pour avoir les informations cachées des acheteurs, le vendeur doit supporter le coût de révélation de cette information. Il s'agit ici de mesurer ce coût et de voir si ce coût est minimum pour que le revenu du vendeur soit maximum.

1.5.3 Garantie de facilité de mise en place du système d'enchère

L'informaticien mesure la *complexité*¹³ de son algorithme. En effet, si on trouve un mécanisme efficace et performant mais dont la mise en place et l'exécution nécessite d'attendre plusieurs heures et consomme une infrastructure très chère alors c'est moins intéressant qu'un algorithme rapide.

L'exécution de l'algorithme de l'enchère second prix de Vickrey se fait en un temps polynomiale [16] [17].

12. cf. Glossaire

13. « L'analyse de la complexité d'un algorithme consiste en l'étude formelle de la quantité de ressources (par exemple de temps ou d'espace) nécessaire à l'exécution de cet algorithme. » Source : Wikipedia

2

Problème d'allocation : efficacité sociale

Sommaire

2.1 Formalisation du problème	6
2.1.1 Notations utilisées	8
2.1.2 Hypothèses	8
2.2 Les enchères au premier prix	8
2.3 Les enchères au second prix	9
2.4 Les propriétés incitatives des procédures d'enchère	10
2.4.1 Les équilibres en stratégies dominantes	10
2.4.2 Les équilibres de Nash	10

Résumé : Le problème d'allocation est un problème d'efficacité sociale. En effet, on atteint l'efficacité sociale quand la taille du gâteau est maximale. La taille du gâteau est la différence, si elle est positive, entre la disposition à payer et la disposition à vendre. Comme il y a un seul vendeur, la disposition à vendre est fixée. On cherche donc l'acheteur qui est prêt à payer plus cher que les autres pour que cette taille soit maximisée. Ce problème est appelé donc problème d'allocation car c'est l'allocation du bien vendu à l'acheteur qui est prêt à payer plus cher que les autres. Il « suffit »¹ donc d'identifier cet acheteur qui maximise l'efficacité sociale pour lui vendre le bien. Le problème est que la disposition à payer est une information privée et les acheteurs ne sont pas obligés de révéler leurs vraies dispositions à payer. Ils vont se comporter comme des agents rationnels qui veulent payer moins cher. On doit donc trouver un mécanisme qui incite ces acheteurs à se comporter de sorte que l'on puisse connaître leurs informations privées.

2.1 Formalisation du problème

Les parties prenantes du jeu sont :

- Le vendeur,
- Les acheteurs ou enchérisseurs,
- Le Commissaire-priseur²,
- Le designer du jeu.

Pour simplifier on considère une enchère à deux acheteurs³ $i \in \{1, 2\}$. L'acheteur i a une évaluation ϑ_i pour le bien. Si l'acheteur i gagne et paye le prix⁴ p alors son utilité est $U_i = \vartheta_i - p$.

Dans les deux types d'enchères que nous allons voir, le gagnant sera l'acheteur qui fait la proposition b_i la plus élevée. Il est tout à fait naturel de faire ce choix puisque notre objectif est d'atteindre l'efficacité sociale en maximisant la taille du gâteau. Pour compléter la définition de cette règle d'allocation, il faudra

1. Tout le problème est là

2. cf. Glossaire

3. Après on pourra généraliser pour le cas de n acheteurs [9][12]

4. Mettre en place un mécanisme d'enchère consiste justement de définir les règles pour désigner le gagnant (problème d'allocation) et des règles pour fixer le prix qui sera payé (problème de distribution).

préciser comment désigner le gagnant en cas d'ex-aequo. On supposera ici par exemple que ça sera le plus jeune qui aura le bien dans ce cas [10]. Des fois on trouve une autre manière de règles qui détermine le(s) gagnant(s) et son/leurs utilités en cas d'ex-aequo. Cf. par exemple [9] p. 155. Le choix du gagnant en cas d'ex-aequo n'est pas négligeable dans la détermination de l'équilibre du jeu et peut changer complètement le résultat.

Il reste à définir la règle qui fixe le prix à payer. C'est là toute la différence entre les deux mécanismes. En effets, penser au prix qui sera payé, change le comportement stratégique des joueurs car leurs incitations changent.

Pour modéliser le problème sous forme de jeux Bayésien statique, il faudrait définir :

1. **L'ensemble N des joueurs** \Rightarrow ici ce sont deux joueurs $\{1, 2\}$,
2. **L'espace B des actions possibles des joueurs** \Rightarrow Pour le joueur i , ce sont les proposition b_i que ce dernier peut faire, c'est à dire l'intervalle $[0, \vartheta_i]$,
3. **Les types ϑ des joueurs** \Rightarrow Le type du joueur i est son évaluation $\vartheta_i \in [0, 1]$,
4. **Les croyances $P(\vartheta)$ des joueurs** \Rightarrow Chaque joueur i pense que le type ϑ_j de l'autre joueur est distribué uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$ car on suppose ici que les évaluations sont indépendantes,
5. **Les utilités U des joueurs** \Rightarrow L'utilité du joueur i

$$U_i = \begin{cases} \vartheta_i - p & \text{si } i \text{ gagne} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.1)$$

Pour trouver les [équilibre de Nash](#)⁵ de ce jeu, on doit d'abord définir les stratégies des joueurs.

Dans un jeux Bayesian statique (donc à information incomplète), on peut voir les stratégies comme on l'a vu pour les jeux dynamiques à information complète et à deux étapes. Dans le cas de l'enchère par exemple, on peut supposer qu'il y a un joueur fictif qui s'appelle « la nature » qui va choisir dans la première étape les types et qui va chuchoter à chaque joueur son type avant de commencer le jeu. Chaque joueur connaît donc son type mais ne connaît pas le type des autres joueurs. Dans la seconde étape, chaque joueur choisira une action c'est à dire il va écrire une proposition dans notre cas d'enchère sous pli scellé.

Une stratégie pour un joueur i , à ne pas confondre avec les actions de ce joueur, est un plan complet d'actions qui définit l'action qui sera choisie dans chaque situation⁶. Les situations sont ici les différents types possibles de chaque joueur. Une stratégie est donc une fonction qui donne l'action du joueur (sa proposition b_i) pour chaque type possible ϑ_i .

$$\begin{aligned} b_i : [0, 1] &\longrightarrow B \\ \vartheta_i &\longmapsto b_i(\vartheta_i) \end{aligned}$$

A l'équilibre de Nash, la stratégie du joueur 1, $b_1(\vartheta_1)$ est une meilleure réponse à la stratégie du joueur 2, $b_2(\vartheta_2)$ et vice versa. On dit que le vecteur des stratégies $(b_1(\vartheta_1), b_2(\vartheta_2))$ est un équilibre de Nash Bayesian si pour chaque $\vartheta_i \in [0, 1]$, b_i est solution de l'équation :

$$\max_{b_i \in [0, 1]} (\vartheta_i - b_i) P(b_i > b_j(\vartheta_j)) \quad (2.2)$$

où $P(b_i > b_j(\vartheta_j))$ est la probabilité (ou plutôt la croyance qu'a le joueur i) pour que son offre soit supérieure à l'offre de l'autre joueur. Il n'est pas nécessaire de considérer le terme $P(b_i < b_j(\vartheta_j))$ dans l'équation 2.2 car le joueur i reçoit un gain nul s'il fait une offre inférieure à l'offre du joueur j .

5. cf. Glossaire

6. En théorie des jeux, les situations sont appelées *ensemble d'information* (« A strategy for a player is a complete plan of action, it specifies a feasible action for the player in every contingency in which the player might be called on to act. » [9] P. 117)

2.1.1 Notations utilisées

On considèrera les notations suivantes⁷ :

- N : Ensemble de taille n des acheteurs dans une enchère d'acheteurs⁸.
- ϑ_i : La *valeur* du bien pour l'agent i .
- b_i : La proposition de l'acheteur i .
- ϑ : Vecteur des n évaluations des participants $(\vartheta_1, \dots, \vartheta_i, \dots, \vartheta_n)$
- B : Vecteur des n proposition des participants $(b_1, \dots, b_i, \dots, b_n)$
- $b_{i,t}$: La proposition de l'agent i à l'instant t pour les enchères dynamiques.
- T : Date de fin de l'enchère pour les enchères dynamiques.
- $P(\vartheta)$: Densité de probabilité.
- ϑ_s : La *valeur* du bien pour le vendeur. C'est le *prix de réserve*.
- p : Le *prix* que paye l'acheteur et que reçoit le vendeur si on néglige les frais d'organisation de l'enchère.
- p_a : Le *prix* payé par l'acheteur s'il est différent du prix reçu par le vendeur.
- p_v : Le *prix* que reçoit le vendeur.
- h : Les frais d'organisation de l'enchère⁹. Par exemple les rétributions du *commissaire-priseur*. $p_a = p_v + h$
- U_i : Le *surplus* d'un agent. C'est son utilité au sens de von Neumann-Morgenstern. Pour l'acheteur c'est $s_i = \vartheta_i - p_a$. Pour le vendeur c'est $s_s = p_s - \vartheta_s$.
- ε : La *surenchère* minimale.

2.1.2 Hypothèses

Les hypothèses suivantes sont adoptées ici :

1. Les propositions b_i sont positives.
2. Les joueurs¹⁰ sont rationnels. Cela signifie qu'ils ne feront pas des propositions supérieures à leur évaluations ($\forall i \in N, b_i \leq \vartheta_i$) et ils veulent maximiser leur utilités.
3. Les frais d'organisation h de l'enchère sont négligeables.
4. Les évaluations privées des agents ϑ sont indépendantes dans le cas des enchères à valeurs privées.
5. Les types d'acheteurs, C'est à dire leurs évaluations ϑ_i , sont uniformément distribuées sur l'intervalle $[0, 1]$.
6. Les distributions des probabilités des évaluations sont connues par tout les agents¹¹.
7. Les acheteurs dans une enchère d'acheteurs sont neutres par rapport au risque, cela veut dire que pour eux, une loterie consistant à tirer au sort entre un revenu R_1 avec la probabilité a et un revenu R_2 avec la probabilité $1 - a$ apporte la même utilité que le revenu espéré $aR_1 + (1 - a)R_2$.
8. Dans le cas des enchères sous plis scellés les acheteurs font leurs propositions en même temps.

2.2 Les enchères au premier prix

Dans les enchères écrites au premier prix, chaque acheteur i écrit son offre b_i et le met sous pli scellé. Les enveloppes sont rassemblées et ouvertes par un centre (le *commissaire-priseur* par exemple). Le vainqueur,

7. Dans ce paragraphe on regroupe les notations qu'on utilisera pour continuer l'étude sur les enchères mais dans le cadre de ce mini-mémoire d'ESD208 on ne les utilisera pas toutes.

8. Par symétrie c'est le nombre de vendeurs dans une enchère de vendeurs

9. Ici on négligera ces frais pour simplifier. On a donc $p_a \approx p_s \approx p$

10. acheteurs dans le cas d'une enchère d'acheteurs

11. Common prior assumption : la distribution de probabilité de croyance de chaque joueur sur le type des autres joueurs est une information commune. « Each player's beliefs about the vector of player types must be identical, and equal to p . » [12]

qui a valorisé le bien plus que les autres et plus que le **prix de réserve**¹², paye le prix qu'il a écrit dans son offre. En cas d'ex-aequo, on peut supposer par exemple que l'acheteur le plus jeune remporte le bien.

L'utilité d'un acheteur i s'écrit dans ce cas :

$$U_i = \begin{cases} \vartheta_i - b_i & \text{si } b_i > b_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.3)$$

L'enchère optimale pour chaque participant dépend de ce qu'il croit être les valeurs des autres participants. Si ces estimations ne sont pas correctes, le bien peut être vendu à un acheteur qui ne lui attribue pas la valeur la plus élevée. ([20] p. 375)

Avec la formalisation 2.3 précédente de l'enchère sous pli-scélé au premier prix, on trouve [10] la caractéristique suivante pour le gagnant i :

$$B = (b_1(\vartheta_1), \dots, b_i(\vartheta_i), \dots, b_n(\vartheta_n)) \text{ est un équilibre de Nash} \Leftrightarrow \max_{j \neq i} \vartheta_j \leq \max_{j \neq i} b_j = b_i \leq \vartheta_i \quad (2.4)$$

Cela signifie que :

- Le gagnant ne propose pas plus que sa vraie évaluation,
- Le gagnant fait une proposition suffisamment élevée,
- Il y a au moins un autre acheteur qui a fait la même proposition que le gagnant.

Cela veut dire que dans notre cas de deux acheteurs, il n'y a équilibre de Nash que si les deux acheteurs ont la même valorisation ϑ_i et font la même proposition b_i .

2.3 Les enchères au second prix

Comme dans l'enchère précédente, le gagnant dans une enchère sous pli scélé à second prix¹³ est celui qui a offert la meilleure proposition. En revanche le prix qu'il payera correspond à la proposition du deuxième. L'idée vient du fait que le gagnant a privé le second de gagner. Le gagnant dans ce cas est *pivot*¹⁴. En effet, si ce gagnant n'était pas là, le second aurait pu gagner.

Le principe de ce mécanisme est que la somme que doit payer le pivot, c'est à dire le gagnant, est liée au fait qu'il est responsable de la privation du bien être du second.

Dans l'enchère au second prix les deux problèmes d'allocation et de distribution sont séparés. En effet, le prix qui sera payé par le gagnant i maintenant ne dépend plus de sa stratégie $b_i(v_i)$ mais plutôt de la stratégie du deuxième plus grand offreur.

L'utilité d'un acheteur i s'écrit donc dans ce cas :

$$U_i = \begin{cases} \vartheta_i - b_j & \text{si } b_i > b_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.5)$$

Avec la formalisation 2.5 précédente, on trouve [10] la caractéristique suivante pour le gagnant i :

$$B = (b_1(\vartheta_1), \dots, b_i(\vartheta_i), \dots, b_n(\vartheta_n)) \text{ est un équilibre de Nash} \Leftrightarrow \begin{cases} \max_{j \neq i} \vartheta_j \leq b_i \\ \max_{j \neq i} b_j \leq \vartheta_i \end{cases} \quad (2.6)$$

Cela signifie que :

- Le gagnant fait une proposition suffisamment élevée,
- Le gagnant a la plus grande évaluation.

12. cf. Glossaire

13. Appelée aussi enchère de Vickrey.

14. Pivot c'est à dire sans lui, la décision ne sera plus la même.

Cela signifie qu'annoncer sa vraie valorisation est un équilibre de Nash.

2.4 Les propriétés incitatives des procédures d'enchère

2.4.1 Les équilibres en stratégies dominantes

Ici on peut exiger que :

- Pour chaque joueur, « dire la vérité » est **parmi les meilleures** réponses quel que soit le comportement des autres joueurs. C'est un équilibre en stratégies faiblement dominante,
- Pour chaque joueur, « dire la vérité » est **LA meilleure** réponses quel que soit le comportement des autres joueurs. C'est un équilibre en stratégies strictement dominante

Pour l'enchère sous pli scellé à premier prix 2.2, il n'y a pas d'équilibre en stratégie dominante ou faiblement dominante. En effet, même si dire la vérité est une stratégie faiblement dominante pour les perdants car de toute façon leur utilité sera nulle, ce n'est pas le cas pour le gagnant qui sera toujours incité à diminuer sa proposition (en donc ne pas dire la vérité) tant qu'elle est supérieure à la deuxième proposition.

Maintenant est ce qu'il y a un équilibre en stratégie dominantes ou faiblement dominante dans le cas de l'enchère à second prix ? Autrement dit, est-il intéressant d'être honnête en annonçant sa vraie valorisation quoi que fasse les autres joueurs ? La réponse est oui [20]. Pour voir cela on considère notre exemple de deux acheteurs i et j . Comme vu dans l'équation 2.2, le gain attendu pour le joueur i est : $(\vartheta_i - b_j)P(b_i > b_j(\vartheta_j))$.

- Si $\vartheta_i > b_j$, pour que la probabilité de gagner soit la plus élevée possible, i jouera $b_i = \vartheta_i$
- Si $\vartheta_i < b_j$, pour que la probabilité de gagner soit la plus faible possible possible, i peut jouer aussi $b_i = \vartheta_i$

⇒ Dans les deux cas, « révéler sa vraie valorisation » est une meilleure réponse pour le joueur i . Le raisonnement est le même pour les deux joueur.

On peut le montrer autrement comme mentionné dans [6] :

- $\vartheta_i > b_j$ implique qu'on pourrait perdre le bien en étant celui qui accorde le plus de valeur, ce qui serait absurde,
 - $\vartheta_i < b_j$ signifie que si l'on gagne on réalise un surplus négatif.
- ⇒ Les joueurs ont intérêt à faire des propositions correspondant à leur vraies valorisations du bien.

2.4.2 Les équilibres de Nash

Avec la caractéristique de l'enchère sous pli scellé à premier pris 2.4, on peut dire que les acheteurs ne sont honnêtes, c'est à qu'ils n'annonceront leurs vraies évaluation, que s'il existe au moins deux acheteurs qui ont la **même** plus grande évaluation. Ce qui n'est pas toujours le cas.

La règle sur la détermination du gagnant en cas d'ex-aequo signifie donc que l'acheteur le plus agé ne gagnera jamais dans une situation d'équilibre de Nash [10].

Les acheteurs dans une enchères à premier prix ne sont donc pas incités à révéler leur informations privée. Ils ont plutôt intérêt à faire des enchères différentes de leurs évaluations. On dit que **l'enchère au premier prix est manipulable**.

Pour l'enchère de Vickrey, comme vu au paragraphe 2.4.1, révéler la vraie évaluation est une meilleure réponse quoi que fasse les autres. C'est donc un équilibre de Nash aussi. **L'enchère au second prix n'est pas manipulable**.

3

Problème de distribution : maximisation du profit

Sommaire

3.1 Description du problème	11
3.2 Théorème d'équivalence des revenus	11

Résumé : Dans ce chapitre, on citera brièvement les principaux résultats et travaux qui ont étudié le problème de distribution dont l'objectif est de maximiser le profit du vendeur.

3.1 Description du problème

Dans le chapitre 2 notre problème était d'atteindre l'efficacité sociale en maximisant la taille du gâteau. On doit maintenant fixer le prix de cette transaction. Ce prix est la répartition du gâteau entre le vendeur et l'acheteur. C'est un problème de répartition. Dans une enchère d'acheteurs, on cherche à maximiser le revenu du vendeur (Symétriquement, dans une enchère de vendeurs, on cherchera à minimiser le coût subit par l'acheteur).

L'ajout d'un prix de réserve pourrait augmenter l'espérance de gain du vendeur mais dans ce cas le mécanisme n'est pas efficace au sens de Pareto. Cela ressemble à la « charge morte » du monopole¹ (cf. [20] page 357).

3.2 Théorème d'équivalence des revenus

Le théorème est énoncé de la manière suivante [6] :

Toutes les procédures d'enchère dans lesquelles le vainqueur est celui qui annonce le plus fort prix et dans lesquelles ceux qui ne gagnent pas réalisent le même surplus - en général un surplus nul - aboutissent au même prix, c'est-à-dire au même revenu pour le vendeur, à condition que les enchérisseurs soient neutres par rapport au risque (utilité du revenu linéaire).

1. Deadweight loss of monopoly

4

Conclusion et perspectives

Soyons humbles, ce travail n'est qu'une introduction à l'introduction de l'introduction... de l'étude des enchères. Le modèle à deux acheteurs avec les hypothèses considérés (Cf. 2.1.2) sont trop simplifiés par rapport à la réalité mais cela permet de comprendre les principes de base. C'est un sujet très vaste avec beaucoup d'applications dans plusieurs domaines et qui nécessite encore du travail. Ce n'est pas par hasard que l'économiste William Vickrey a eu le prix nobel suite à ses travaux sur les enchères.

On se demande s'il y a un lien entre les enchères dynamiques tel que l'enchère au second prix généralisée pratiquée par les moteurs de recherche comme Google et la notion de « Business moment »¹ [11][19]. En effet, Gartner² parle des enchères en temps réel qui utilisent des technologies autour du Big Data [1]. Il serait intéressant d'étudier ce thème surtout en ce moment de 3^{me} révolution industrielle de l'informatique où l'un des enjeux est la gestion de la relation client. En effet, ces nouvelles technologies de Big Data combinées avec les outils d'enchères pourrait aider à mieux comprendre les clients.

Plusieurs mécanismes d'enchères ont été implémentés et automatisés comme l'outil « Auction Solver » [13]. Gartner a réalisé aussi un comparatif des solutions progiciels en 2001 [3].

Enfin cette étude nous a donné de nouvelles idées pour revoir le problème d'équilibrage de charge entre les processeurs dans un calculateur parallèle réalisant des simulations scientifiques. Ce problème a été étudié ici : mohamedelafrit.com/pfe. On pourrait revoir ce problème comme dans l'esprit de l'analyse de cloud computing avec les enchères[8] [2]. En effet, le bien à vendre serait la charge de calcul à réaliser, les processeurs peuvent être considérés comme les acheteurs. La puissance de de calcul de ces processeurs est analogue à la disposition à payer des acheteurs. L'équilibrage de la charge de calcul pour paralléliser la simulation numérique sera donc analogue au problème d'allocation qu'on a commencé à étudié ici. Intuitivement, la solution optimale serait analogue à l'enchère second prix généralisé comme celui mis en place par Google (à étudier...).

1. Gartner définit la notion de « Business moment » de la manière suivante : « A transient opportunity that is exploited dynamically ». Il s'agit d'analyser les données clients en temps réel et de trouver une solution rapidement pour faire la proposition commerciale la plus adaptée au moment

2. Gartner est une entreprise de conseil et de recherche dans le domaine des techniques avancées. C'est une référence dans son domaine

Commissaire-priseur

Le commissaire-priseur dirige la vente aux enchères

équilibre de Nash

Un équilibre de Nash est une situation dans laquelle aucun joueur n'est incité à changer sa stratégie en tenant compte des stratégies des autres joueurs. Dans cette situation, chaque stratégie de chaque joueur est une meilleure réponse aux stratégies des autres joueurs.

e-Enchère

eBidding en anglais. C'est un prix proposé par un acheteur sans que ce dernier soit présent physiquement. La proposition est réalisée à travers une plateforme en ligne.

enchère

Auction en anglais. *Une enchère est un mécanisme par lequel un agent unique met en concurrence un nombre indéterminé, mais toujours supérieur à un et souvent élevé, d'autres agents en vue de leur vendre ou de leur acheter un bien, un service, ou un ensemble de biens et ou de services.* [6]

enchères doubles

Double Auction en anglais. Situation dans laquelle le vendeur et l'acheteur ont tout les deux des informations privées. On peut étudier cette situation à l'aide de la théorie des contrats.

mécanisme

Un mécanisme est fondamentalement l'inverse de la théorie des jeux. En théorie des jeux, nous partons avec la description des règles du jeu et nous souhaitons décrire quel sera le résultat. Quand nous définissons un mécanisme, nous partons avec la description du résultat souhaité et nous essayons de définir un jeu qui permet de l'atteindre [20] [15].

prix de réserve

Minimum Bid en anglais. C'est le prix minimum accepté par le vendeur, en dessous duquel le bien ne sera pas vendu.

surenchère

Increment en anglais. C'est le pas d'enchère ou le montant permettant de faire la proposition suivante dans une enchère dynamique.

Bibliographie

- [1] M. McGuire A. Frank. Hype cycle for advertising, 2015. Gartner, July 2015. [Link to article G00271665](#).
- [2] GH Dastghaibifard Amin Nezarat. Efficient nash equilibrium resource allocation based on game theory mechanism in cloud computing by using auction. PLOS, 2005. [Link to article](#).
- [3] Emily A. Andren. B2b auction software magic quadrant. Gartner, April 2001. [Link to article G0097430](#).
- [4] D.E. Campbell. Incentives : Motivation and the Economics of Information. Cambridge University Press, 2006. [Link to book](#).
- [5] William Cong. Auctions of real options. SSRN, 2016. [Link to article](#).
- [6] Jean Magnan de Bornier. Les mécanismes d'enchère, chapter 7. [Link to lecture notes](#).
- [7] Benjamin Edelman, Michael Ostrovsky, and Michael Schwarz. Internet advertising and the generalized second price auction : Selling billions of dollars worth of keywords. Working Paper 11765, National Bureau of Economic Research, November 2005. [Link to article](#).
- [8] Sara Arévalos Flor. Auction-based resource provisioning in cloud computing. a taxonomy. Computing Conference (CLEI), 2015 Latin American, IEEE, 2015. [Link to article](#).
- [9] R. Gibbons. Primer in Game Theory. Prentice Hall Books, 1994. [Link to book](#).
- [10] Auteur inconnu. Sealed-bid Auction, chapter 7. Editeur inconnu. [Link to article](#).
- [11] Rob van der Meulen Janessa Rivera. Gartner says digital businesses will spot opportunities in a matter of seconds. Gartner, April 2014. [Link to article](#).
- [12] G.A. Jehle and P.J. Reny. Advanced Microeconomic Theory. The Addison-Wesley series in economics. Financial Times/Prentice Hall, 2011. [Link to book](#).
- [13] Richard M. Katzwer. Auction solver. Princeton University, 2011. [Link to tool](#).
- [14] Jonathan Levin. Auction theory. Stanford, October 2004. [Link to lecture notes](#).
- [15] Eric Maskin. An introduction to mechanism design. Warwick Economics Summit 2014, 2014. [Link to video](#).
- [16] Tim Roughgarden. Algorithmic game theory. Stanford, October 2013. [Link to lecture notes](#).
- [17] Tim Roughgarden. Frontiers in mechanism design. Stanford, October 2014. [Link to lecture notes](#).
- [18] Lisa Smith. The auction method : How nyse stock prices are set. Investopedia, Septembre 2013. [Link to article](#).
- [19] Pieter van Schalkwyk. What is a “business moment” in your business? xmpo, March 2015. [Link to article](#).
- [20] Hal Varian. Introduction à la microéconomie : 7ème édition française (traduction de la 8ème édition américaine). de boeck, 2011. [Link to book](#).

