ENSEIRB - 1eAnnée Filière Informatique Année 2003-2004

Graphes et algorithmes

Durée : 2h.
Notes de cours et de TD autorisées.

Exercice 1 1. Soit K le graphe dessiné sur la figure 1.

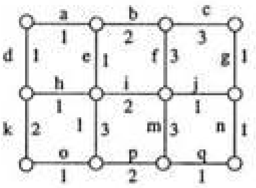

FIG. 1 – Un graphe

1. Calculer un arbre couvrant minimal de K en suivant l'algorithme PRIM. Nous ne vous demandons pas de décrire à chaque itération l'état de chacune des variable mais simplement de fournir l'ordre dans lequel les arêtes de l'arbre ont été retenues.
2. Calculer un arbre couvrant minimal de K en suivant l'algorithme KRUSKAL. Même remarque que précedemment.
3. Est-ce que tout ACM d'un graphe G peut être fourni par une exécution de KRUSKAL sur ce même graphe ? Si oui prouver-le, sinon fournir un contre-exemple.
4. L'étudiant brilliant-mais-parfois-fantaisiste propose de calculer un arbre recouvrant minimum d'un graphe G de la façon récursive suivante :
   (a) il partitionne l'ensemble de sommets V de G en deux ensembles V_1 et V_2 de même cardinalité à un près.
   (b) il calcule les deux sous-graphes G_1 et G_2 de G induits respectivement par V_1 et V_2 ($G_1 := G|V_1$ et $G_2 := G|V_2$).
   (c) il retourne comme A.C.M. de G l'union des A.C.M de G_1 et G_2 augmenté d'une arête de poids minimale à traverser la coupure (V_1, V_2).

   Est-ce que cet algorithme est correct ? Si oui prouver-le, sinon fournir un contre exemple. Est-ce que le partitionnement de V en deux parties de cardinalités proches influence la correction de l'algorithme ?

Exercice 2 Considérant l'algorithme Ford-Fulkerson résolvant le problème du flot maximum, indiquez sa complexité en temps dans le pire des cas selon que :

1. les capacités des arcs sont à valeurs entières.
2. les capacités des arcs sont à valeurs rationnelles.

3. les capacités des arcs sont à valeurs réelles.
4. les graphes sont acycliques.

Exercice 3 Nous considérons ici des graphes simples sans boucles non orientés. Une *clique* d'un graphe G est un ensemble de sommets deux à deux adjacents (toute paire de sommets distincts sont extrémités d'une arête) ; elle est *maximum* si elle est de cardinalité maximale parmi toutes les cliques. Un *recouvrement-sommet* d'un graphe H est un ensemble de sommets telle que toute arête est incidente à au moins l'un des sommets de H. Il est *minimum* si il est de cardinalité minimale parmi tous les recouvrement-sommets de H. Le graphe complémentaire de G est le graphe noté G^c contenant les mêmes sommets que G et contenant comme arête toute paire de sommets distincts qui ne soit pas une arête de G. Soit I le graphe dessiné sur la Figure 2.

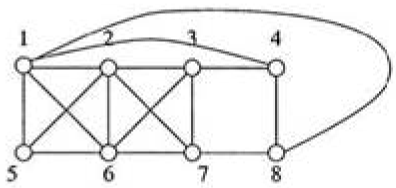

FIG. 2 – Un graphe I

1. Enumérer l'ensemble des cliques de I puis l'ensemble de ses cliques maximums.
2. Dessiner I^c le graphe complémetaire de I.
3. Enumérer l'ensemble des recouvrement-sommets minimums de I^c.
4. Indiquer comment à partir d'une clique d'un graphe G obtenir un recouvrement-sommet de G^c. Prouver le.
5. Indiquer comment à partir d'un recouvrement-sommet d'un graphe H obtenir une clique de H^c. Prouver le.
6. Mêmes questions que précedemment en considérant des cliques maximums et des recouvrement-sommets minimums.
7. En supposant qu'il n'existe aucun algorithme de complexité en temps polynomiale pour calculer une clique maximale d'un graphe, que peut-on conclure et pourquoi ?
8. Connaissez-vous un problème proche (syntaxiquement) du recouvrement-sommet minimum qui admette une solution en temps polynomiale ?