Graphes et algorithmes

Durée : 2h.
Notes de cours et de TD autorisées.

Pour tout graphe G, n (resp. m) désigne son nombre de sommets (resp. arcs ou arêtes).

Exercice 1 Les graphes ici sont simples et non orientés. Le *nombre chromatique* d'un graphe est le nombre minimum de couleurs qui permettent de colorier un graphe (le plus petit entier k pour lequel G est k-coloriable). On rapelle qu'une k-coloration d'un graphe est une fonction $V(G) \to [1, k]$ qui associe à chaque sommet une couleur (un entier de $[1, k]$) de façon à ce que deux sommets adjacents aient deux couleurs mimimales.

1. Quel est le nombre chromatique d'un arbre ? d'un graphe complet à n sommets ? d'une grille à $k \times k$ sommets ?
2. Existe t-il un algorithme rapide décidant si un graphe est 2-coloriable ? 3-coloriable ? k-coloriable (k fixé) ?

   Considérons l'algorithme suivant :

   ```
   fonction nombreChromatique(G:graphe):entier

       dans une liste L trier les sommets de G par degré croissant ;

       pour tout sommet x extrait de L
           colorier le sommet x du plus entier non nul distinct de chacune
           des couleurs des sommets voisins précédemment coloriés ;

       retourner la plus grande couleur des sommets de G
   ```
3. Selon que le graphe est représenté par une matrice d'adjacence ou un tableau de listes de successeurs, quelle est la complexité en temps et en espace de cet algorithme ?
4. Existe t-il une relation entre le nombre chromatique de G et l'entier `nombreCromatique(G)` ? Pensez-vous que l'algorithme est correct ?
5. Choisissez un arbre, une grille et un graphe complet avec un nombre significatifs de sommets. Sur chacun de ces 3 graphes, calculer l'entier retourné par cet algorithme. Vous fournirez un dessin de chacun des graphes, le numéro d'ordre de traitement de chaque sommet sera indiqué ainsi que la couleur de chaque sommet (l'entier couleur sera souligné).
6. Existe t-il un graphe sur lequel deux exécutions de l'algorithme fournisse deux réponses différentes ? Si oui, lesquels ? Si oui, qu'en concluez-vous ?

Exercice 2 Une chaine de supermarchés décide de faire l'inventaire de ses magasins en un nombre minimal de jours. En outre, nous savons que l'inventaire d'un magasin nécessite un jour et la présence de plusieurs responsables (directeur, responsable du stock, etc) et qu'un même responsable peut travailler dans plusieurs magasins.

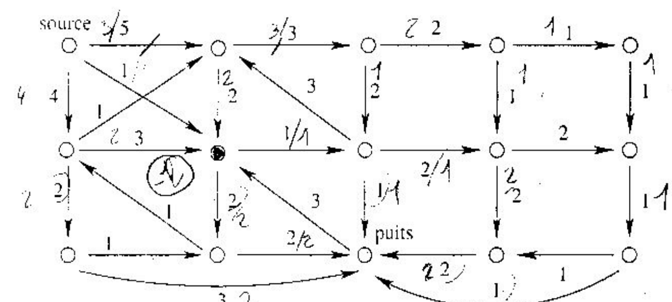
1. Ramener ce problème à un problème sur les graphes. Vous préciserez notamment le type de graphe, ce que représentent les sommets, les arêtes. Vous fournirez un exemple.
2. Est-ce que ces deux problèmes sont équivalents ? Prouver votre réponse.
3. Connaissez-vous une solution algorithmique rapide à ce problème ?
4. Supposons que le nombre de reesponsables est limité par un entier k fixé. Reformuler le problème de graphes associé. Pensez-vous que cela a une incidence sur la rapidité de la solution algorithmique ?

Exercice 3 Le degré entrant d'un sommet x d'un graphe orienté est le nombre d'arcs d'extrémité x. Un graphe non orienté G est *injectif* si il existe une orientation de ses arêtes tel que tous les sommets du graphe orienté induit H sont de degré entrants égaux à 1. Le graphe H est appelé une *bonne orientation* de G.

1. Dessiner un graphe injectif G et une bonne orientation H de G. Le graphe G possédera exactement 30 sommets, 2 composantes connexes contenant respectivement 14 et 16 sommets ainsi que deux circuits de longueurs respectivement 3 et 4.
2. Caractériser la notion d'injectivité à l'aide (au choix) des notions de circuits, de composantes connexes, de nombres de sommets ou de nombres d'arêtes. L'expression dera de la forme "Un graphe non orienté est injectif si et seulement ...".
3. Ecrire un algorithme en $\theta(m)$ qui décide si un graphe non orienté est injectif. Fournir un exemple.
4. Ecrire un algorithme en $\theta(m)$ qui calcule pour tout graphe injectif G une bonne orientation de G. Fournir un exemple.

   Dans l'écriture des algorithmes précédents, vous pourrez utiliser naturellement des routines auxiliaires vues en TD ou en cours en précisant leurs spécifications.

Exercice 4 Considérons le réseau ci-dessous :



1. Fournissez une coupe de capacité minimale de ce réseau.
2. Fournissez un flot maximal de ce réseau.
3. Prouvez que le flot fourni est maximal.
4. Dessiner le réseau résiduel induit par ce flot.
5. Modifier la capacité d'un seul arc (de capacité initiale non nulle) de façon à obtenir un flot maximal de valeur la plus grande possible ? Prouver la correction de votre choix.