ENSEIRB - Informatique - 1ère année — 2003-2004

Examen du cours «Analyse d'algorithmes»

(Sans documents)

Exercice 1 (Langages réguliers)
Donnez, pour chacun des langages suivants, l'automate fini déterministe, minimal et complet qui le décide.

1. Le langage L_1 des mots qui contiennent un nombre pair de a et un nombre impair de b sur l'alphabet $\Sigma_1 = \{a, b\}$.
2. Le langage $L_2 = \{a^n.a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sur l'alphabet $\Sigma_2 = \{a\}$.
3. Le langage $L_3 = \{a^n.b^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ sur l'alphabet $\Sigma_3 = \{a, b\}$.
4. Le langage L_4 des nombres impairs et multiples de 5 encodés en binaire, $\Sigma_4 = \{0, 1\}$.

Exercice 2 (Machines de Turing)
On souhaite résoudre le problème suivant :

Soient deux entiers naturels a et b, a est-il un multiple de b ?

Définissez une machine de Turing M qui répond à cette question, sachant que son alphabet de ruban est $\Gamma = \{B, Z\}$ où B est le symbole blanc.

1. Indiquez :
   (a) Le nombre de rubans utilisés par la machine, et ce à quoi correspond chacun d'eux.
   (b) L'encodage d'une instance du problème pour cette machine.
   (c) L'automate de la machine. Vous préciserez si cette machine est déterministe.
2. Calculez la complexité asymptotique au pire de M.

Exercice 3 (Preuve de correction)
Soit le while-program suivant :

```
i := 0 ;
tantque (i*b < a) faire
  i := i+1
fintantque ;
si (i*b = a) alors
  r := vrai
sinon
  r := faux
finsi
```

1. Quel problème résout-il ?
2. Donner ses pré-conditions et ses post-conditions.
3. Prouver la correction totale de ce while-program.

Règles du calcul de Hoare (preuve de correction totale) :

Règle de conséquence :

$$\frac{P' \Rightarrow P,\ [P]\,S\,[Q]\ ,\ Q \Rightarrow Q'}{[P']\,S\,[Q']}$$

Règle d'affectation :

$$\frac{}{[P[e/x]]\,x{:=}e\,[P]}$$

Règle de séquence :

$$\frac{[P]\,S_1\,[Q]\ ,\ [Q]\,S_2\,[R]}{[P]\,S_1;S_2\,[R]}$$

Règle du «`si`» :

$$\frac{[P \wedge B]\,S_1\,[R]\ ,\ [P \wedge \neg B]\,S_2\,[R]}{[P]\,\texttt{si}\ B\ \texttt{alors}\ S_1\ \texttt{sinon}\ S_2\ \texttt{finsi}\,[R]}$$

Règle du «`tantque`» :

$$\frac{[P \wedge B \wedge (t = X)]\,S\,[P \wedge (t < X)]\ \wedge (P \wedge B \Rightarrow t > 0)}{[P]\,\texttt{tantque (B) faire S fintantque}\,[P \wedge \neg B]}$$

où :

- X est une variable qui n'apparaît pas dans P, B, t et S.
- t est un terme dont les variables libres sont les variables de P, B et S.
- Si $\mathbb{D}$ est le domaine de valuation de t :
  - Il existe une relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{D}$ telle que $(\mathbb{D}, \leq)$ est un ensemble bien fondé.
  - X est à valeur dans $\mathbb{D}$.
  - $t = X$ est équivalent à $(t \leq X) \wedge (X \leq t)$.
  - $t < X$ est équivalent à $\neg(X \leq t)$.
  - De même, $t > 0$ est équivalent à $\neg(t \leq 0)$.