

## Introduction

L'automatique est la science étudiant les automatismes et traitant de la substitution de mécanismes automatiques à toutes les opérations susceptibles d'être exécutées par l'homme. Cette science était anciennement dénommée *cybernétique*. Parmi les composantes de cette science, nous allons plus particulièrement nous intéresser à la *commande (automatique) des procédés dynamiques continus*.

Dans ce cadre, on distingue l'*automatique linéaire ou non linéaire, continue (commande analogique) ou à temps discret (commande numérique)*.

Il faut savoir que la commande (ou *asservissement*) d'un procédé physique nécessite :

- l'identification (modèle de comportement) ou la modélisation (modèle de connaissance) de son comportement dynamique → *mise en équation* ;
- la synthèse d'une loi de commande → *fonction de transfert et transformation de Laplace*;
- l'implantation physique de cette loi de commande → *correction*.

## Transformation de Laplace

La modélisation d'un système physique fait intervenir un système d'équations différentielles. Sa résolution (plus ou moins difficile) permet la détermination de régimes transitoires du système dynamique. Ces régimes peuvent aussi être déterminés en utilisant le calcul opérationnel fondé sur la *transformation de Laplace*.

### DEFINITION DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE

Soit  $f(t)$  une fonction causale<sup>1</sup>, alors la transformée de Laplace de  $f$  est  $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$ . On dit que  $F(p)$  est l'image de  $f(t)$  dans le domaine symbolique et que  $f(t)$  est l'image de  $F(p)$  dans le domaine temporel. On appelle transformation de Laplace l'application  $L$  telle que  $L(f) = F$ .

### PROPRIETES

On suppose que  $F(p)$  et  $G(p)$  sont les images de  $f(t)$  et  $g(t)$ , deux fonctions causales.

#### Unicité

Toute fonction temporelle  $f(t)$  possède une image unique  $F(p)$  ; et réciproquement.

#### Linéarité

- L'image de 0 est 0.
- L'image de  $k.f(t)$  est  $k.F(p)$ .
- L'image de  $f(t) + g(t)$  est  $F(p) + G(p)$ .

#### Dérivation – Intégration

- L'image de  $f'(t)$ , la dérivée de  $f$  est  $pF(p) - f(0)$  avec le plus souvent,  $f(0) = 0$ .
- L'image de  $\int_0^t f(u) du$ , la primitive de  $f$  est  $\frac{1}{p} F(p)$ .

#### Facteur d'échelle

L'image de  $f(at)$  est  $\frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$ .

#### Retard et Amortissement

- L'image de  $f(t - \tau)$  est  $e^{-p\tau} F(p)$ .
- L'image de  $e^{wt} f(t)$  est  $F(p + w)$ .

#### Théorème des valeurs finales et initiales

- $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p)$
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} pF(p)$

#### Convolution

L'image du produit de convolution  $f(t) * g(t)$  est  $F(p) \times G(p)$ .

---

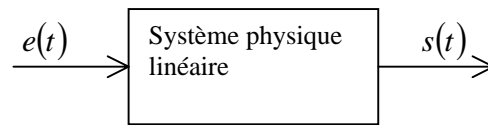
<sup>1</sup> Nulle sur  $]-\infty, 0[$

## TRANSFORMEES USUELLES

<i>Image symbolique</i>	<i>Image temporelle de fonctions causales</i>
$\frac{1}{p}$	Échelon
1	Dirac
$\frac{1}{p^2}$	Rampe
$\frac{1}{p+a}$	$e^{-at}$
$\frac{w}{p^2+w^2}$	$\sin(wt)$
$\frac{w}{p^2-w^2}$	$\sinh(wt)$
$\frac{w}{(p+a)^2+w^2}$	$e^{-at} \sin(wt)$
$\frac{p}{p^2+w^2}$	$\cos(wt)$
$\frac{p}{p^2-w^2}$	$\cosh(wt)$
$\frac{p+a}{(p+a)^2+w^2}$	$e^{-at} \cos(wt)$
$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$t^n$
$\frac{1}{p(1+\tau p)}$	$1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$
$\frac{1}{(p+a)^2}$	$te^{-at}$

## Fonction de transfert

Un *transfert* est la transmittance  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$  d'un système linéaire générant un signal de sortie  $s(t)$  à partir d'une entrée  $e(t)$ .

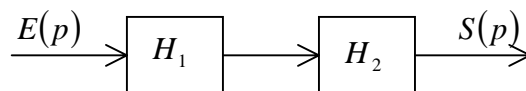


Sachant que  $s(t) = L^{-1}\{H(p)E(p)\}$ , on a  $s(t) = h(t) * e(t)$  où  $h(t)$  est la *réponse impulsionnelle* du système physique.

## OPERATIONS SUR LES TRANSFERTS

### Transferts en cascade

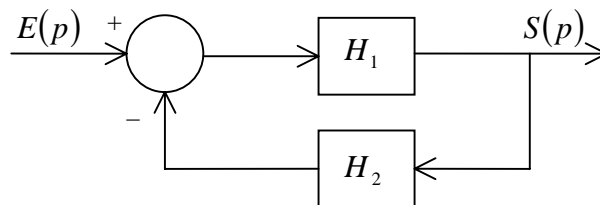
Considérons le schéma suivant :



La transmittance se calcule  $H(p) = H_1(p) \times H_2(p)$ .

### Transferts en réaction

Considérons le schéma suivant :



La transmittance s'écrit  $H(p) = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)}$ .

## RÉPRÉSENTATION DE LA RÉPONSE FRÉQUENTIELLE D'UN TRANSFERT

La *réponse fréquentielle* traduit le comportement en régime sinusoïdale, elle est obtenue en remplaçant  $p$  par  $jw$  où  $w$  est la *pulsation* exprimé en *rad/s*. La *fréquence*  $f$  et la *période*  $T$  sont reliés à la pulsation par les relations

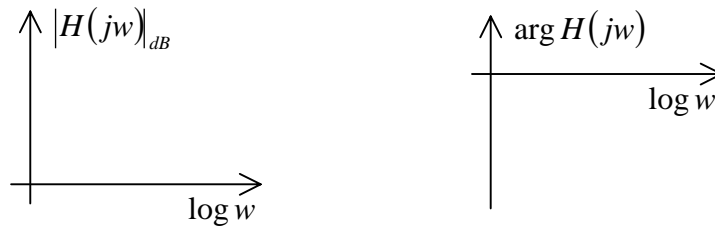
$$w = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Une réponse fréquentielle peut être caractérisée par son *module* et par son *argument* :  $H(jw) = \rho(w)e^{j\Phi(w)}$ .

Le gain peut être exprimé en décimal  $\rho$  ou en décibel  $\rho_B = 20 \log \rho$ .

### Diagramme de Bode

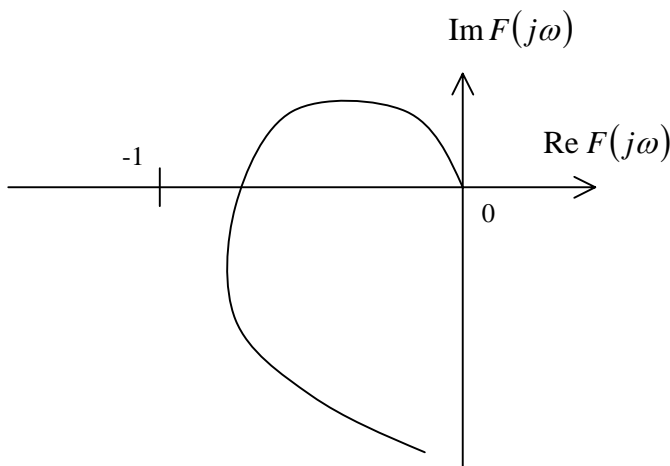
Le diagramme de Bode consiste en un diagramme de gain en  $dB$  et un diagramme de phase en  $rd$  ou  $d^\circ$ . Pour les tracer, on s'aide des *diagrammes asymptotiques de Bode*. Ils sont définis par morceaux en étudiant localement (pour des bandes de fréquence données) le comportement asymptotique de la réponse fréquentielle.



On se ramène, autant que l'on peut, à un produit de transferts du 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> ordre, pour lesquels on connaît bien les diagrammes asymptotiques ; et on procède par superposition pour obtenir le diagramme de Bode final.

### Plan de Nyquist – Abaque de Hall

Représentation fréquentielle de  $F(j\omega)$  sur le lieu de Nyquist :



Supposons que  $F(j\omega)$  désigne la FTBO d'un procédé. On a alors  $FTBF(j\omega) = \frac{A(j\omega)}{1 + F(j\omega)}$ . Par conséquent, le point  $(-1, 0)$  est critique sur le lieu de Nyquist.

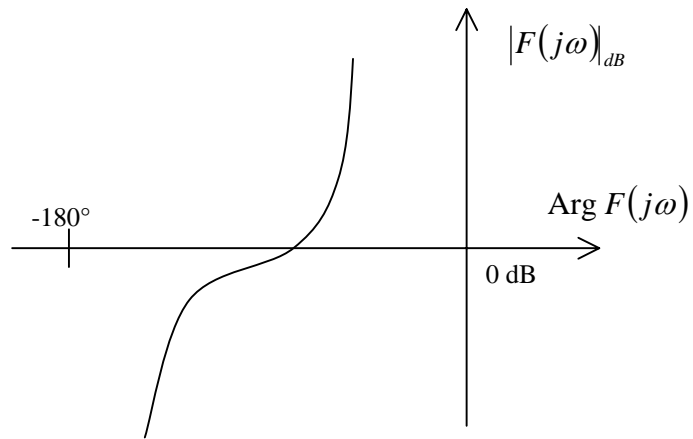
Par ailleurs, la distance au point critique sur le plan donne  $|1 + F(j\omega)|$ .

L'abaque de Hall donne les modules et arguments de  $\frac{F(j\omega)}{1 + F(j\omega)}$  pour un  $F(j\omega)$  donné. On peut en déduire par la suite les modules et arguments de la FTBF en calculant  $B(j\omega)$ , et en appliquant la relation suivante :

$$FTBF(j\omega) = \frac{F(j\omega)}{1 + F(j\omega)} \times B^{-1}(j\omega).$$

### Plan de Black (Nichols) – Abaque de Black

Représentation fréquentielle de  $F(j\omega)$  sur le lieu de Black :



Le point critique est maintenant  $(-180^\circ, 0 \text{ dB})$ .

Pour un  $F(j\omega)$  donné, l'abaque de Black donne les modules et arguments de  $\frac{F(j\omega)}{1 + F(j\omega)}$ .

## **Systemes linéaires fondamentaux**

**DERIVATEUR**

**INTEGRATEUR**

**TRANSFERT DU 1<sup>ER</sup> ORDRE**

**TRANSFERT DU 2<sup>EME</sup> ORDRE**

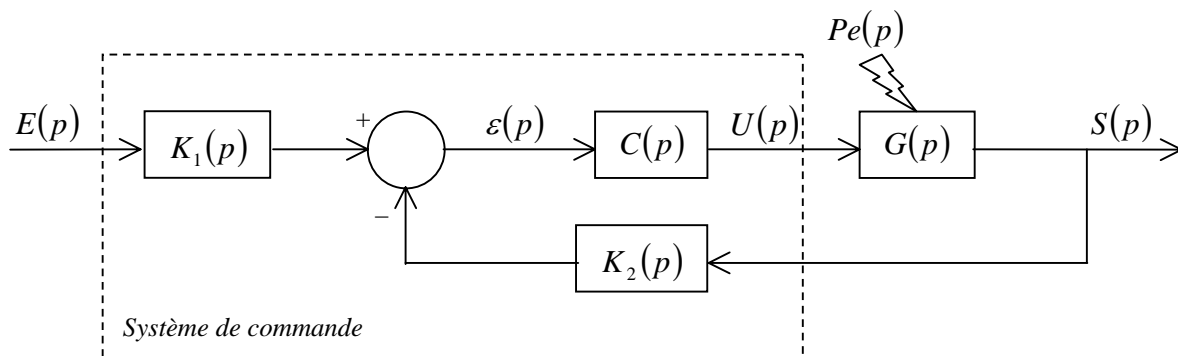
## Asservissement

En matière d'asservissement, la notion d'asservi consiste à rendre esclave la sortie d'un système physique des variations d'une entrée de référence appelée *consigne*.

Parmi les questions à se poser sur un système asservi, trois concernent particulièrement l'utilisateur :

- Est-il *précis* ? L'écart  $\varepsilon$  entre la consigne affichée et la valeur de sortie réellement obtenue, est-il élevé ou faible, voire nul ?
- Est-il *stable* ? La valeur finale de la sortie n'est elle obtenue qu'après un grand nombre d'oscillations autour de l'équilibre, caractéristique d'un système trop faiblement amorti ? Un équilibre peut-il être atteint.
- Est-il *rapide* ? La valeur de la sortie est-elle atteinte au bout d'un temps suffisamment court pour être compatible avec les besoins de l'application ?

Comme nous le verrons par la suite, les exigences précédentes sont contradictoires et nécessiteront toujours de rechercher un compromis le meilleur : cette contradiction est nommée *dilemme stabilité – précision*.



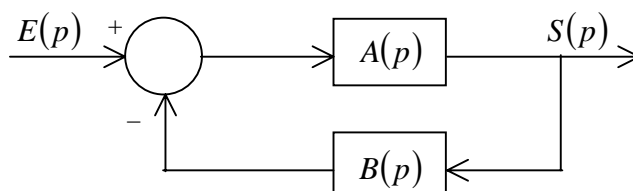
### SCHEMA FONCTIONNEL ENVISAGE

- $e(t)$  : entrée de référence, ou consigne ou sortie désirée
- $\varepsilon(t)$  : erreur ou écart
- $s(t)$  : sortie du procédé
- $u(t)$  : entrée du procédé ou commande
- $G(p)$  : transmittance du modèle du procédé
- $C(p)$  : correcteur ou régulateur
- $K_1(p)$  : préfiltre, précompensateur, ou organe d'affichage
- $K_2(p)$  : élément de la chaîne de retour
- $pe(t)$  : perturbation

### FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTEME ASSERVI

#### Fonction de transfert en boucle fermée ou F.T.B.F.

Un système asservi est constitué d'un chaîne directe représentée par une fonction de transfert  $A(p)$  et d'une



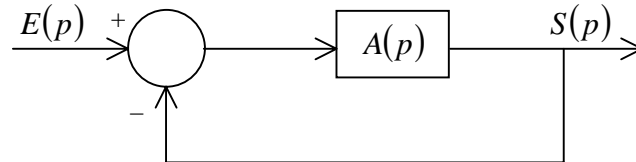


chaîne de retour représentée par une fonction de transfert  $B(p)$ .

On définit la fonction de transfert en boucle fermée du système :  $FTBF(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$ .

### Système asservi à retour unitaire

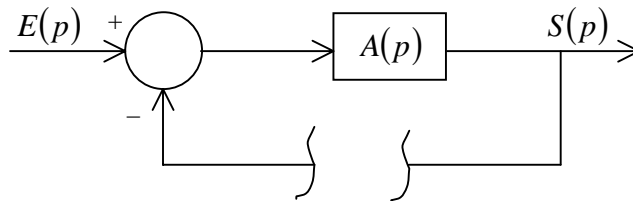
Un cas particulier important est celui où le retour est unitaire, c'est-à-dire  $B(p) = 1$ . Dans ce cas, la FTBF se



simplifie pour donner  $FTBF(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)}$ .

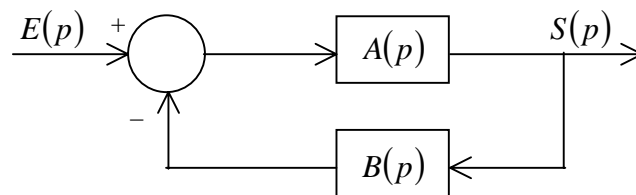
### Fonction de transfert en boucle ouverte ou F.T.B.O.

Lorsque l'on transforme un système à retour unitaire en rompant la boucle de réaction, le système est dit *en boucle ouverte*.

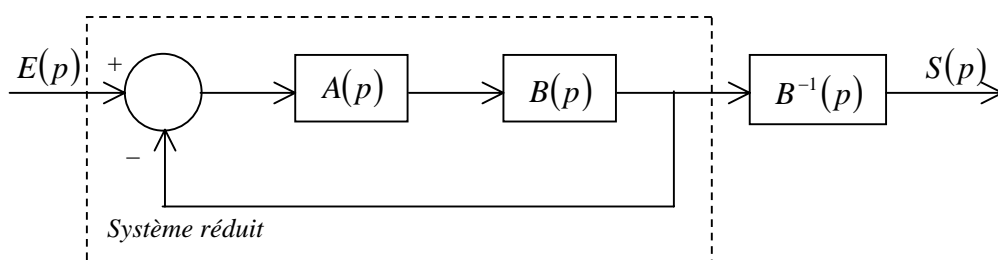


La fonction de transfert en boucle ouverte de ce système est :  $FTBO(p) = A(p)$ .

Considérons maintenant le schéma plus complet :



On peut le remplacer par un système équivalent à retour unitaire.



La fonction de transfert du système réduit vaut :  $FTBO(p) = A(p).B(p)$ .

## CARACTERISATION DES REPONSES FREQUENTIELLES EN ASSERVISSEMENT ET EN REGULATION

Fréquence de coupure à -6 dB

Fréquence de résonance

### DYNAMIQUE D'UNE COMMANDE

Elle caractérise généralement *le mode oscillatoire dominant* de la commande, c'est à dire le comportement d'une transmittance du second ordre proche du comportement de la commande.

Approximation du mode dominant

On néglige la plus petite constante de temps.

### DETERMINATION DE LA DYNAMIQUE

La rapidité et l'amortissement d'une commande en boucle fermée peuvent être estimés à l'aide de paramètres de la boucle ouverte.

Rapidité & Amortissement

Les marges de stabilité mesurées en boucle ouverte déterminent *l'amortissement* de la dynamique en boucle fermée. On peut aussi utiliser le facteur de résonance mesuré à l'aide du lieu en boucle ouverte.

En fixant des paramètres de la boucle ouverte (fréquence au gain unité, marge de phase, marge de gain) ou de la boucle fermée mesurable sur les lieux de Black et de Nyquist de la *FTBO* (facteur de résonance), on peut garantir des caractéristiques de la *FTBF* (fréquence de coupure, amortissement).

La fréquence au gain unité en boucle ouverte  $\omega_u$  détermine *la rapidité* de la commande en boucle fermée. *Une fréquence  $\omega_u$  élevée assure une dynamique rapide de l'asservissement.*

Une dynamique rapide sollicite fortement l'entrée du procédé. Une telle sollicitation n'est pas toujours possible ou souhaitable. On parlera alors de *sensibilité de l'entrée* ou par opposition *d'immunité de l'entrée*. Comme une commande rapide est malgré tout toujours recherchée, en automatique, on doit constamment gérer le compromis *rapidité de la commande / sensibilité de l'entrée*.

### SENSIBILITE DE L'ENTREE

Définition...

## Stabilité

La notion de stabilité revêt une importance particulière en Automatique. D'un point de vue qualitatif, nous dirons qu'un système est stable si, après qu'une perturbation l'ait écarté de sa position d'équilibre, il revient spontanément à cette position. Hormis quelques systèmes pour lesquels on recherche une instabilité (systèmes explosifs par exemple), la première condition de bon fonctionnement d'un système est la *stabilité*.

### CONDITIONS DE STABILITE

#### Stabilité à partir de la FTBF

La condition nécessaire et suffisante de stabilité est que les racines de l'équation caractéristique soient à partie réelle négative.

Une condition nécessaire de la stabilité est que les coefficients du polynôme caractéristique du dénominateur de la FTBF soient tous du même signe (par convention<sup>2</sup>, positif). Cette condition est généralement vérifiée pour les systèmes physiques.

Remarquons :

- *Un système du premier ordre* est toujours stable.
- *Un système du deuxième ordre* est stable si tous les coefficients du dénominateur sont positifs.

#### Point critique & Condition de stabilité à partir de la boucle ouverte

Considérons la fonction de transfert en boucle fermée  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$ . La condition d'auto-oscillation en mettant l'entrée à 0,  $E(p) = 0$ , est  $A(p)B(p) = -1$ , c'est-à-dire  $FTBO(p) = -1$ .

En régime harmonique, la condition  $FTBO(j\omega) = -1$ , met en évidence un point particulier, de module 1 et d'argument  $-180^\circ$ , appelé *point critique*.

Lorsque l'on veut contrôler un processus par une boucle d'asservissement, il est nécessaire de connaître les conditions que doit respecter le système en boucle ouverte pour que le système obtenue, une fois la boucle fermée, soit stable. On donne ces conditions :

- *Un système est stable*, si pour la pulsation  $\omega_{-180^\circ}$  le module de la *FTBO* est  $< 1$ . L'amplitude des sinusoïdes diminue jusqu'à 0.
- *Un système est instable*, si pour la pulsation  $\omega_{-180^\circ}$  le module de la *FTBO* est  $> 1$ . L'amplitude des sinusoïdes augmente jusqu'à saturation.

On propose ci-après différents critères algébriques ou graphiques déterminant la stabilité d'un système automatique.

#### Critère de Routh

C'est un critère algébrique qui permet de déterminer si l'équation caractéristique de la *FTBF* comporte des pôles à partie réelle positive.

#### Critère de Bode

Un système sera stable en boucle fermée si le diagramme de Bode de la *FTBO* fait apparaître que pour la pulsation  $\omega_{-180^\circ}$ , la courbe de gain passe en dessous du niveau  $0 \text{ dB}$ .

#### Critère de Nyquist

Un système est stable en boucle fermée si la réponse fréquentielle en boucle ouverte prise pour  $\omega \in ]-\infty, +\infty[$  entoure<sup>3</sup> le point critique dans le sens trigonométrique un nombre de fois égal au nombre de pôles à partie réelle positive de la boucle ouverte.

<sup>2</sup> Il suffit de changer le signe des coefficients du numérateur.

### Critère du revers

Ce critère ne s'applique qu'aux systèmes ne possédant *pas de pôle à partie réelle strictement positive en boucle ouverte*. C'est un cas particulier du critère de Nyquist.

Dans le plan de Nyquist, le système est stable en boucle fermée si sa réponse fréquentielle en boucle ouverte laisse le *point critique*  $(-1, 0)$  à sa gauche pour les fréquences croissantes.

Dans le plan de Black, le système est stable en boucle fermée si sa réponse fréquentielle en boucle ouverte laisse le *point critique*  $(-180^\circ, 0 \text{ dB})$  à droite pour les fréquences croissantes.

### **DEGRE DE STABILITE**

Le degré de stabilité se chiffre par :

- le facteur de résonance en boucle fermée ;
- le facteur d'amortissement ;
- le premier dépassement réduit de la réponse indicielle ;
- les marges de stabilité (traitées dans la section suivante).

#### Le facteur de résonance

Le facteur de résonance en boucle fermée (en asservissement) dans l'espace des fréquences est le rapport du gain maximum obtenu à la résonance et du gain statique, soit  $Q = \left| \frac{FTBF(j\omega_R)}{FTBF(j0)} \right|$ , avec  $\omega_R$  la pulsation de résonance.

Sur le diagramme de Black, la courbe de gain tangente la FTBO précisément en  $\omega_R$  (maximum local), on en déduit donc la valeur de Q ; de même pour  $\omega = 0$ . En réalité, le Q donné à partir des abaques de Black correspond au système réduit, mais on négligera ce point.

Un grand facteur de résonance entraîne un degré de stabilité petit.

#### Le facteur d'amortissement

Une commande est stable si son régime libre<sup>4</sup> est amorti. Le facteur d'amortissement dans l'espace des temps est

le taux de décroissance des oscillations du régime libre :  $\zeta = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{D_i}{D_{i+1}} \right)$ , avec  $D_i$  le  $i^{\text{ème}}$  dépassement.

Un facteur d'amortissement tendant vers 0 entraîne un degré de stabilité petit. Si le facteur d'amortissement est négatif alors  $D_{i+1} > D_i$  et le système est instable.

#### Le premier dépassement

Le premier dépassement de la réponse indicielle est  $D_1 = \frac{s(t_{D_1}) - s(\infty)}{s(\infty) - s(0)}$ , en %.

Un premier dépassement grand entraîne un degré de stabilité petit.

### **LES MARGES DE STABILITE**

Un système à la limite de la stabilité est mal amorti. Son bon fonctionnement n'est pas assuré car une faible modification de ses caractéristiques peut le rendre instable. Par conséquent, on ne va pas se contenter de réaliser un système théoriquement stable, mais on garantit la stabilité du système en prenant des marges de sécurité.

Les marges de stabilité mesurent la distance au point critique des lieux de Black, Nyquist ou Bode *du transfert en boucle ouverte*.

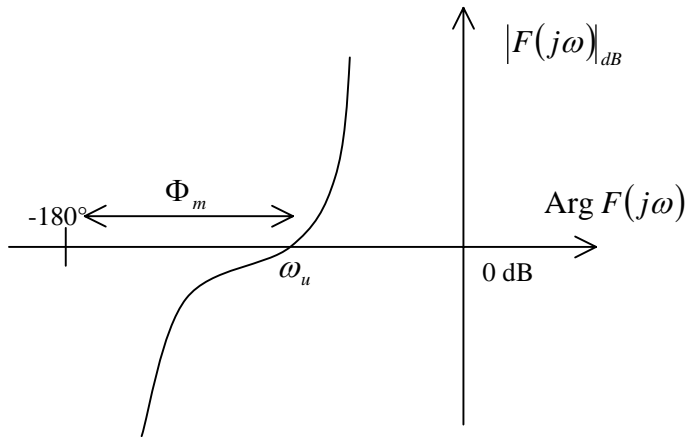
<sup>3</sup> la FTBO prise pour  $\omega$  négatif est symétrique par rapport à l'axe des réels de la FTBO prise pour  $\omega$  positif.

<sup>4</sup>  $e(t) = 0$

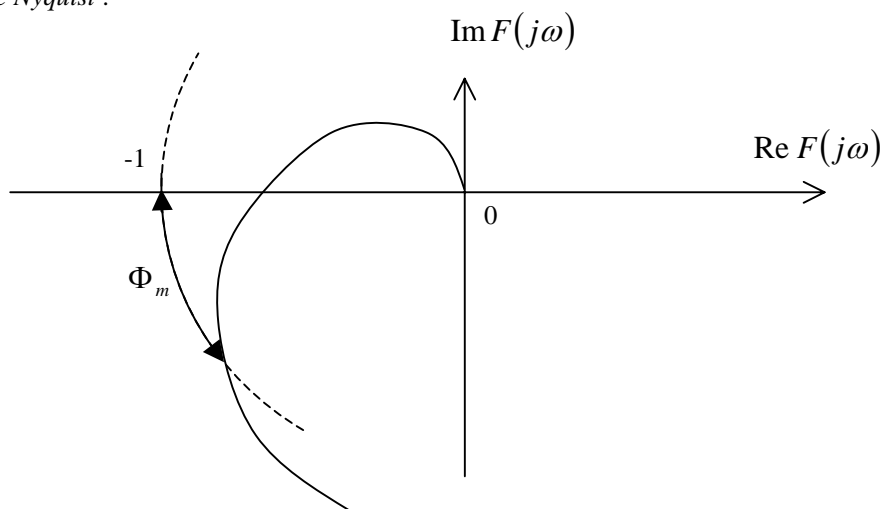
### Marge de phase

La marge de phase est  $\Phi_m = 180^\circ + \arg F(j\omega_u)$  avec  $\omega_u$  la fréquence au gain unité en boucle ouverte, c'est-à-dire telle  $|F(j\omega_u)| = 1$  ou  $|F(j\omega_u)|_{dB} = 0$ .

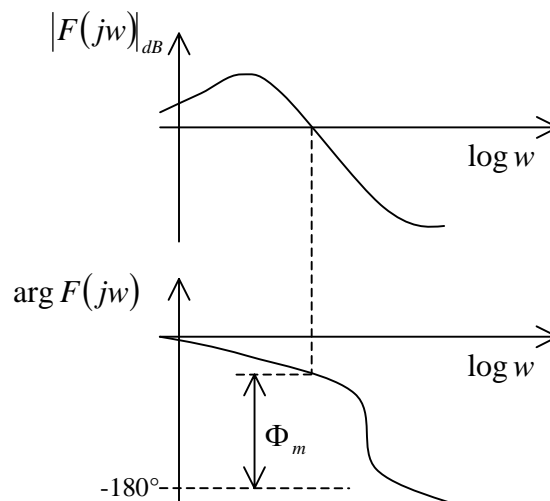
Sur le plan de Black, on mesure la distance horizontale au point critique :



Sur le plan de Nyquist :



Sur le plan de Bode :



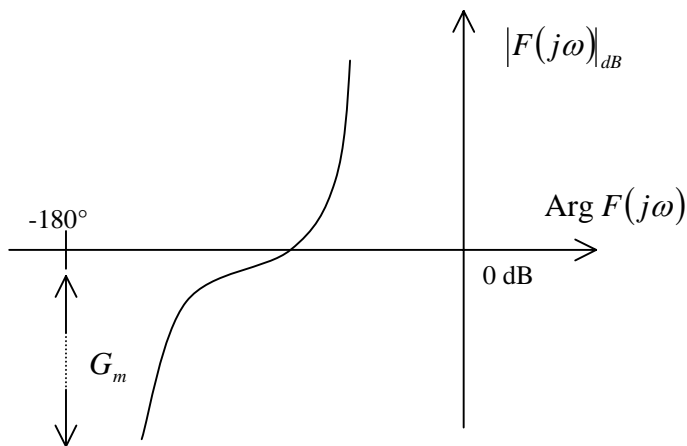
Une marge de phase petite entraîne un degré de stabilité petit. On utilise couramment une marge de phase de  $45^\circ$  qui garantit un fonctionnement correct de la plupart des systèmes.

### Marge de gain

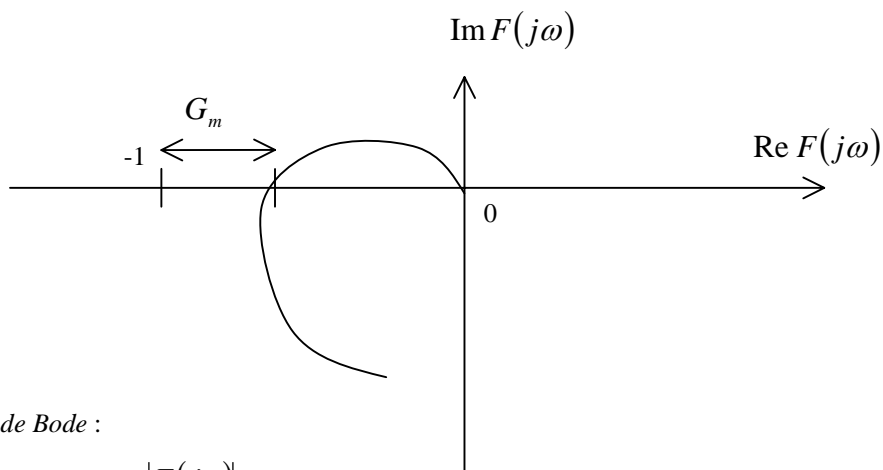
La marge de gain est  $G_m = \frac{1}{|F(j\omega_{-180^\circ})|}$  ou  $(G_m)_{dB} = -|F(j\omega_{-180^\circ})|_{dB}$  avec  $\omega_{-180^\circ}$  telle que

$$\text{Arg } F(j\omega_{-180^\circ}) = -180^\circ.$$

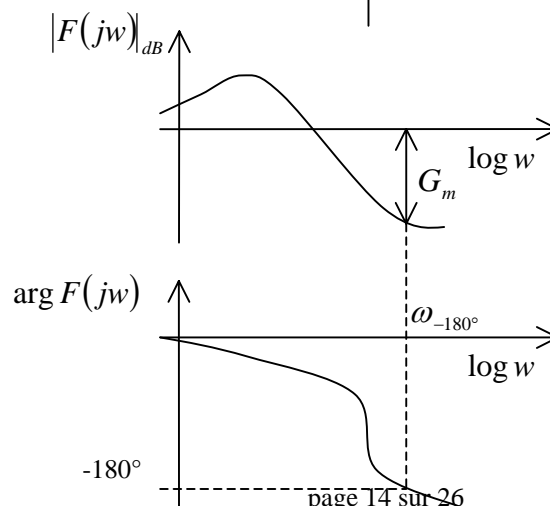
Sur le plan de Black, on mesure la distance verticale au point critique :



Sur le plan de Nyquist :



Sur le plan de Bode :



Une petite marge de gain entraîne un degré de stabilité petit. Une valeur de marge de gain utilisée habituellement est  $12 \text{ dB}$ .

### **DEGRE DE STABILITE OPTIMAL**

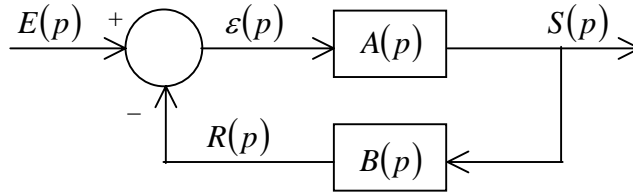
Le bon degré de stabilité est le degré de stabilité spécifié par le cahier des charges. L'amortissement et le premier dépassement réduit de la réponse indicielle étant généralement spécifiés entre 0,4 et 0,7, et 0% et 30%. Il est généralement souhaitable de garantir un facteur de résonance de l'ordre de 0,5 dB à 3 dB.

Par exemple,  $D_I = 25\%$  correspond sensiblement à  $Q = 2,3$ , ou  $\Phi_m = 45^\circ$  et  $G_m = 10 \text{ dB}$ .

## Dilemme stabilité / précision

### PRECISION

Considérons le système asservi de la figure ci-dessous.



Nous souhaitons que la sortie  $s(t)$  évolue en fonction du temps conformément à la consigne  $e(t)$ . Afin d'évaluer la précision du système, nous définissons comme erreur  $\varepsilon(t)$  à un instant donné  $\varepsilon(t) = e(t) - r(t)$ .

Après transformation de Laplace, on établit que  $\varepsilon(p) = E(p) - R(p) = \frac{E(p)}{1 + A(p)B(p)}$ .

#### Erreur en régime permanent

Nous nous intéressons ici à l'erreur en régime permanent, c'est-à-dire à  $\varepsilon(t \rightarrow \infty)$ .

En appliquant *le théorème de la valeur finale*, on obtient :  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{pE(p)}{1 + FTBO(p)}$ .

Au voisinage de zéro,  $FTBO(p)$  est équivalent à  $\frac{C}{p^\alpha}$ . Dans cette expression  $C$  désigne *le gain* et  $\alpha$  désigne *la classe du système en boucle ouverte*.

Ainsi  $\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{pE(p)}{1 + \frac{C}{p^\alpha}}$ , donc pour que l'erreur en régime permanent soit faible, il faut que les constantes  $C$

et  $\alpha$  soient grandes. Or ces conditions s'opposent à la condition de stabilité du système (marge de phase plus petite). Par conséquent, les conditions de stabilité et de précisions sont contradictoires ; c'est *le dilemme stabilité / précision*.

*L'erreur indicielle* ou *erreur statique* ou *erreur de position* est obtenue lorsque l'entrée du système est un échelon unitaire. *L'erreur de traînage* est obtenue lorsque l'entrée est une rampe.

Le tableau ci-dessous récapitule les différentes erreurs en fonction de la classe du système.

	Classe 0	Classe 1	Classe 2 et plus
Erreur de position	$\frac{1}{1+C}$	0	0
Erreur de traînage	$\infty$	$\frac{1}{C}$	0

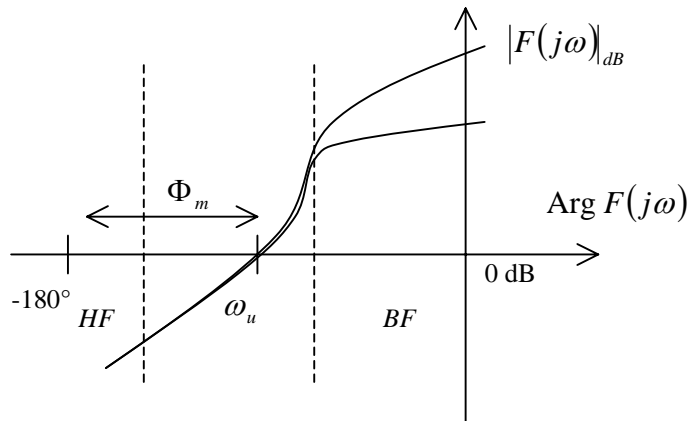
### AMELIORATION DU COMPROMIS DEGRÉ DE STABILITÉ / PRÉCISION

L'objectif est d'augmenter le gain statique du transfert en boucle ouverte sans pour autant diminuer le degré de stabilité.



Solution 1

Une première solution consiste à améliorer le gain de la *FTBO* en basse fréquence sans aucune action sur la réponse fréquentielle en moyenne et haute fréquences.



Un meilleur gain en basse fréquence entraîne une meilleure précision. Par contre,  $\omega_u$  et la marge de phase ne sont pas modifiées, donc le degré de stabilité est inchangé. Cette solution va être satisfaisante si le degré de stabilité et la rapidité étaient déjà satisfaisantes.

Solution 2

On propose une seconde méthode, consistant à augmenter le gain de la *FTBO* sur l'ensemble des fréquences, puis à modifier la *FTBO* en moyenne et haute fréquences pour améliorer le degré de stabilité.

L'augmentation proportionnelle sur l'ensemble des fréquences améliore en particulier le gain en basse fréquence, donc augmente la précision. De plus, elle augmente la fréquence au gain unité  $\omega_u$ , ce qui a pour effet de rendre l'asservissement plus rapide. Cependant, la marge de phase diminue. Sans toucher aux basses fréquences, on déforme la réponse fréquentielle au voisinage de la nouvelle fréquence au gain unité, pour améliorer le degré de stabilité.

Il est souvent intéressant de combiner ces deux méthodes : la première pour la précision, et la seconde pour la rapidité et le degré de stabilité.

## La correction en cascade

### SCHEMA DE CORRECTION

Le correcteur  $C(p)$  est calculé de façon à satisfaire les objectifs de la boucle de commande, c'est-à-dire :

- rendre indépendante les variations de la sortie  $s(t)$  vis-à-vis des perturbations ou bruit de mesure (dans les bandes de fréquence ou c'est possible)  $\rightarrow$  *précision* ;
- avec une bonne stabilité et un bon degré de stabilité  $\rightarrow$  *rapidité et degré de stabilité* ;
- même si le modèle réel du système à commander est légèrement différent du modèle nominal  $G(p) \rightarrow$  *robustesse* (capacité du système approché de la réalité à fonctionner avec son modèle idéal en dépit des perturbations réelles) ;
- avec une sensibilité de l'entrée raisonnable  $\rightarrow$  *sensibilité de l'entrée*.

Dans un premier temps, nous allons considérer que le régulateur  $C(p)$  est de type *proportionnel* afin de conduire à une certaine rapidité de la boucle. Nous allons alors complexifier  $C(p)$  afin d'améliorer la précision et le degré de stabilité.

### AMELIORATION DE LA PRECISION : LE FILTRE A ACTION INTEGRALE

Ce filtre doit assurer une précision parfaite tout en étant transparent au voisinage de  $\omega_u$ , la fréquence au gain unité en boucle ouverte. Il est bien sûr inutile si le gain du régulateur est suffisant pour assurer la précision demandée.

L'action intégrale a pour effet d'augmenter la classe de la *FTBO*, ce qui en général doit suffire à assurer une précision parfaite ; on s'attache également à augmenter le gain de la boucle ouverte et la rapidité du correcteur en diminuant sa constante de temps.

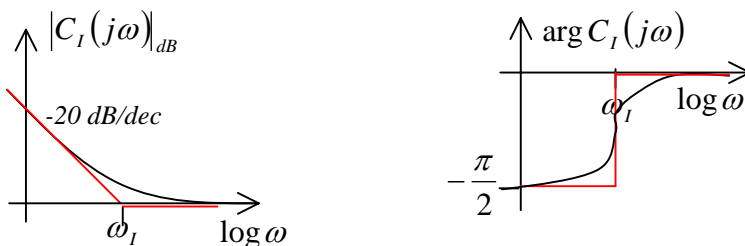
#### Définition

On donne la transmittance d'un filtre à action intégrale :  $C_I(p) = \frac{1 + \tau_I p}{\tau_I p}$  avec  $\tau_I$  la constante de temps

d'intégration. En posant  $\tau_I = \frac{1}{\omega_I}$ , on donne la réponse en fréquence :  $C_I(j\omega) = \frac{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_I}\right)}{j\left(\frac{\omega}{\omega_I}\right)}$ , d'où le gain

s'écrit  $|C_I(j\omega)| = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_I}\right)^2}}{\left(\frac{\omega}{\omega_I}\right)}$  et l'argument  $\arg C_I(j\omega) = \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_I}\right) - \frac{\pi}{2}$ .

On donne le diagramme maintenant le diagramme de Bode du filtre à action intégrale.



#### Placement en fréquence

L'objectif est de prendre  $\omega_I < \omega_u$  le plus grand possible afin d'augmenter le gain en boucle ouverte sur la plus grande bande de fréquence possible. Ce faisant, on choisit  $\tau_I$  le plus petit possible, et on augmente la rapidité.

Si  $\omega_I$  est choisi trop grand ou trop proche devant  $\omega_u$ , alors  $C_I(p)$  n'est plus transparent, notamment vis-à-vis du degré de stabilité (la marge de phase diminue).

On donne quelques données relatives à la transparence :

Choix de $\omega_I$	Gain de $C_I(j\omega_u)$	Argument de $C_I(j\omega_u)$	Commentaires
$\frac{\omega_u}{10}$	$1,005 \approx 0 \text{ dB}$	$-5,7^\circ$	Acceptable
$\omega_u$	$\sqrt{2} \approx 3 \text{ dB}$	$-45^\circ$	Inacceptable, si la marge de phase n'était pas très grande !

### AMELIORATION DU DEGRE DE STABILITE : LE FILTRE A ACTION DERIVEE (AVANCE DE PHASE)

Ce filtre doit assurer un bon degré de stabilité en étant transparent aux basses fréquences. Dans ce but, on réalise une avance de phase  $\Phi$  au voisinage  $\omega_u$ , afin de garantir une marge de phase suffisante.

#### Définition

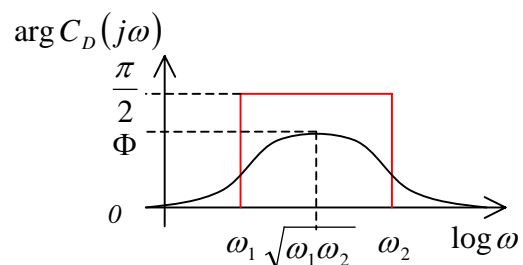
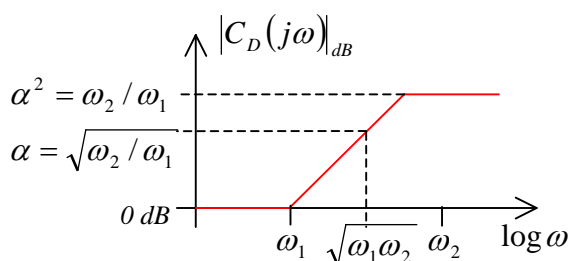
On donne la transmittance d'un filtre à action dérivée :  $C_D(p) = \frac{1 + \frac{p}{\omega_1}}{1 + \frac{p}{\omega_2}}$  avec  $\omega_1 < \omega_2$ . On donne la réponse

en fréquence :  $C_D(j\omega) = \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}$ , d'où le gain s'écrit  $|C_D(j\omega)| = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}}$  et l'argument

$$\arg C_D(j\omega) = \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right).$$

$\omega_1$  et  $\omega_2$  permettent de tronquer fréquemment l'action de ce filtre afin qu'il soit transparent aux basses fréquences et qu'il n'accroisse pas exagérément la sensibilité de l'entrée.

On donne le diagramme maintenant le diagramme de Bode du filtre à action intégrale.



En basse fréquence,  $\omega \ll \omega_1$ , le filtre est totalement transparent. En haute fréquence  $\omega \gg \omega_2$ , le filtre est un gain de  $\alpha^2 = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ . Si  $\omega_2 \gg \omega_1$ , alors en  $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$ , le filtre a une action dérivée  $j\frac{\omega}{\omega_1}$  avec un déphasage caractéristique de  $90^\circ$ .

### Placement en fréquence

L'avance de phase maximale  $\Phi$  est réalisée à la fréquence centrale  $\sqrt{\omega_1 \omega_2}$ . Ainsi, pour augmenter la marge de phase, on choisira  $\omega_1$  et  $\omega_2$  tels que  $\omega_u = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ . Par conséquent,  $\Phi = \arg(C_D(j\omega_u))$ . On peut relier les fréquences au gain  $\alpha$  du filtre pris en  $\omega_u$ , en écrivant  $\omega_1 = \frac{\omega_u}{\alpha}$  et  $\omega_2 = \alpha \omega_u$ .

Si l'on désire une valeur donnée d'avance de phase  $\Phi$  au voisinage  $\omega_u$ , on choisit  $\alpha$  tel que

$$\alpha = \tan\left(\frac{\Phi + \frac{\pi}{2}}{2}\right). \text{ On peut aussi utiliser la relation } \alpha^2 = \frac{1 + \sin \Phi}{1 - \sin \Phi} \text{ pour calculer } \alpha ; \alpha^2 \text{ désigne le gain}$$

du filtre en haute fréquence.

#### Remarques :

- Il faut prendre en compte le gain du filtre à action dérivée en  $\omega_u$ , lors de la détermination de  $C_0$  qui fixe  $\omega_u$ .
- L'introduction du filtre à action dérivée modifie aussi la valeur maximale de la fonction sensibilité de l'entrée en l'augmentant d'un facteur  $\alpha^2$ . Ainsi, plus l'avance de phase nécessaire sera grande, plus l'immunité de l'entrée sera détériorée.

### SYNTHESE D'UN REGULATEUR DE TYPE P.I.D.

Considérons un correcteur  $C(p)$  de type P.I.D., comportant un action proportionnelle, une action intégrale, et une action dérivée ; c'est-à-dire  $C(p) = C_0.C_I(p).C_D(p)$ .

#### Placement de l'action intégrale

L'action intégrale, qui doit garantir la précision, est de la forme  $C_I(p) = \frac{1 + \tau_I p}{\tau_I p}$ . Il s'agit de déterminer

$\omega_1 = \frac{1}{\tau_I}$  de façon à ce que l'action intégrale  $C_I(p)$  soit efficace ( $\tau_I$  le plus petit possible) sans toutefois trop

diminuer la phase de la boucle ouverte au voisinage de la fréquence  $\omega_u$  qui sera la fréquence au gain unité en

boucle ouverte. Suivant les cas, on prend  $2 < \frac{\omega_u}{\omega_1} < 10$ .

#### Placement de l'action dérivée

L'action dérivée, qui doit garantir la stabilité, est de la forme  $C_D(p) = \frac{1 + \frac{p}{\omega_1}}{1 + \frac{p}{\omega_2}}$ . Il s'agit de déterminer  $\omega_1$  et

$\omega_2$  afin que l'action dérivée  $C_D(p)$  apporte la marge de phase voulue  $\Phi_m$  en  $\omega_u$ . La marge de phase est définie par  $\Phi_m = \arg FTBO(j\omega_u) + 180^\circ = \arg C_I(j\omega_u) + \arg C_D(j\omega_u) + \arg G(j\omega_u) + 180^\circ$ . En posant  $\Phi$  l'avance de phase du filtre à action dérivée, on a  $\Phi = \Phi_m - 180^\circ - \arg C_I(j\omega_u) - \arg G(j\omega_u)$

ou encore  $\alpha = \tan\left(\frac{\Phi_m - 90^\circ - \arg C_I(j\omega_u) - \arg G(j\omega_u)}{2}\right)$ . On en déduit immédiatement  $\omega_1 = \frac{\omega_u}{\alpha}$  et

$\omega_2 = \alpha \omega_u$ .

Détermination de  $C_0$ 

$C_0$  est le dernier paramètre à déterminer. Il doit assurer un gain unité à la fréquence  $\omega_u$ , c'est-à-dire

$$|FTBO(j\omega_u)| = 1 \text{ ou encore } C_0 = \frac{1}{|C_I(j\omega_u)||C_D(j\omega_u)||G(j\omega_u)|}. \text{ On rappelle que } |C_D(j\omega_u)| = \alpha.$$

Placement de l'action filtrage

La sensibilité de l'entrée s'exprime en hautes fréquences pour le PID  $Se_\infty = \lim_{\omega \rightarrow \infty} |C(j\omega)| = C_0 \alpha^2$ . Il est

possible de diminuer cette valeur en incluant un filtre passe-bas au régulateur :  $C_F = \frac{1}{1 + \tau_F p}$ . Il s'agit alors

de déterminer  $\omega_F = \frac{1}{\tau_F}$  de façon à ce que l'action de filtrage soit efficace sans toutefois trop diminuer la phase

de la boucle ouverte au voisinage de ce qui sera  $\omega_u$ . Suivant les cas, on prend  $2 < \frac{\omega_F}{\omega_u} < 10$ , pour garantir la

transparence.

Lors de la synthèse d'un PIDF, on détermine tout d'abord l'action F et I, puis on place l'action D (choix de  $\alpha$ ) et finalement on ajuste l'action P. Le correcteur ainsi construit vérifiera  $Se_\infty = 0$ , cependant on a toujours

$$Se_{\max} \approx C_0 \alpha^2.$$

## Commande numérique & Synthèse fréquentielle d'un correcteur numérique

### INTRODUCTION

La commande numérique présente deux avantages :

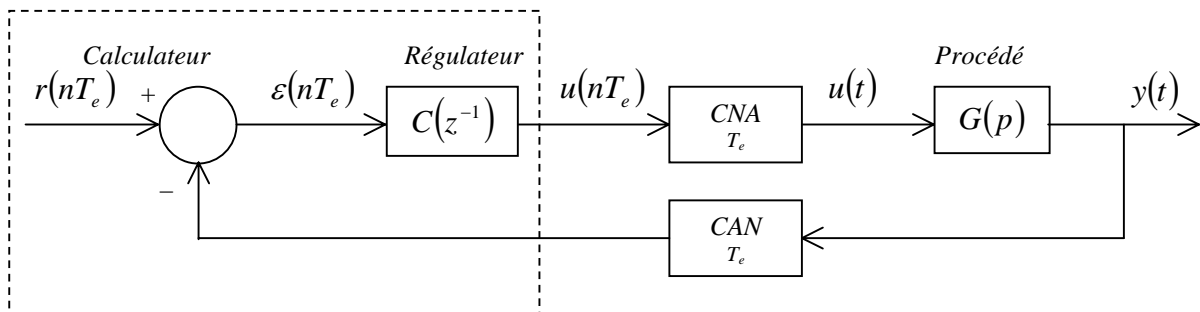
- plus de souplesse par rapport aux solutions analogiques ;
- pas de limitation physique dans le choix des valeurs des paramètres du filtre numérique, qui est implanté sous forme d'équation récurrente.

Toutefois, deux problèmes sont à considérer :

- le choix de la période d'échantillonnage ;
- la méthodologie d'analyse et de synthèse d'un correcteur numérique.

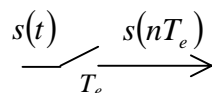
### Schéma de principe d'une commande numérique

Soit un procédé  $G(p)$  commandé par un ordinateur.



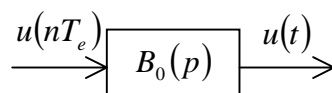
### Modélisation du CAN et du CNA

**Modélisation du CAN :** Le rôle du CAN est d'échantillonner le signal de mesure  $s(t)$  pour définir le signal de mesure discrétisé  $s[nT_e]$ . Son modèle est donc un échantillonneur de période  $T_e$  :

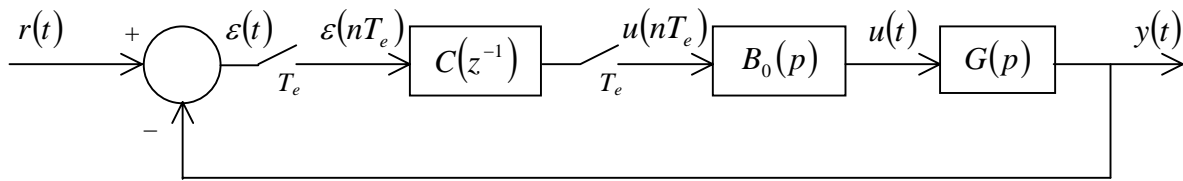


**Modélisation du CNA :** Pour reconstituer un signal continu, à partir d'un signal échantillonné, il faut faire une interpolation entre deux instants d'échantillonnage. La méthode la plus simple consiste à bloquer le signal entre deux instants d'échantillonnage  $nT_e$  et  $(n+1)T_e$  à la valeur du signal à l'instant  $nT_e$ . L'élément physique permettant de réaliser cette opération est un *bloqueur d'ordre zéro* dont la fonction de transfert s'écrit

$$B_0(p) = \frac{1 - e^{-T_e p}}{p}$$



En remplaçant le CAN et le CNA par leur modèle respectif, à savoir un échantillonneur de période d'échantillonnage  $T_e$  et un échantillonneur de même période suivi d'un *bloqueur d'ordre zéro*  $B_0(p)$ , le schéma de principe peut se donner sous la forme d'un schéma d'étude conformément à la figure suivante.



## SYNTHESE FREQUENTIELLE D'UN CORRECTEUR NUMERIQUE

### Transformation en $\Delta$

La première approche pour synthétiser un correcteur numérique consiste à utiliser une méthode d'approximation d'un correcteur continu  $C(p)$  par un correcteur discret  $C(z^{-1})$ .

Considérons un système continu de fonction de transfert  $\frac{y(p)}{u(p)} = p$ , fonction de transfert d'un dérivateur pur,

d'équation différentiel dans le domaine temporel :  $y(t) = \frac{d}{dt} u(t)$ . En appliquant la méthode aux différences

finies, on peut encore écrire  $y(t)$  sous la forme  $y(t) = \lim_{T_e \rightarrow 0} \left[ \frac{u(t) - u(t - T_e)}{T_e} \right]$ . Lorsque  $T_e$  est une période

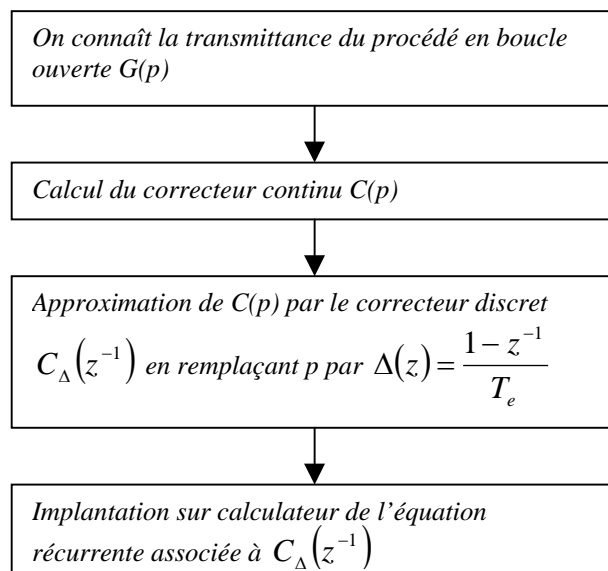
d'échantillonnage constante et suffisamment petite, on peut approximer cette expression par l'équation récurrente suivante :  $y(nT_e) = \frac{u[nT_e] - u[(n-1)T_e]}{T_e}$ . En prenant la transformée en Z de cette expression, nous obtenons

la transmittance en Z suivante  $\Delta(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$ . Cette approximation s'appelle *la transformation en  $\Delta$* .

Ainsi pour approximer un correcteur continu  $C(p)$  par un correcteur discret, il suffit de remplacer la variable  $p$

dans  $C(p)$  par  $\Delta(z) = \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$ , soit :  $C_{\Delta}(z^{-1}) = C\left(\frac{1 - z^{-1}}{T_e}\right)$ .

En résumé, on présente la méthodologie de synthèse d'un correcteur numérique par utilisation de la transformation en  $\Delta$ .



Les approximations précédentes posent deux types de problèmes :

- le correcteur  $C_{\Delta}(z^{-1})$  n'est qu'une approximation du correcteur  $C(p)$  ;
- le système à commander, vu du calculateur, n'est pas le système continu  $G(p)$ , mais le système discret de transmittance  $G_0(z) = Z[B_0(p)G(p)]$ .

Pour employer cette méthode, il faut donc échantillonner le système suffisamment rapidement pour que les réponses fréquentielles de  $C_{\Delta}(e^{j\omega T_e})$  et  $C(j\omega)$ , de  $G_0(e^{j\omega T_e})$  et  $G(j\omega)$ , soient à peu près semblables dans le domaine fréquentiel de travail.

### Transformation en W (ou bilinéaire)

La transformation en W permet de résoudre ces inconvénients ; elle permet de calculer un correcteur discret  $C_w(z^{-1})$  à partir de la connaissance de la transmittance discrète  $G_0(z) = Z[B_0(p)G(p)]$  du procédé échantillonné à commander, avec les mêmes outils qu'en continu.

La transformation en W est donnée par les relations suivantes :  $z = \frac{1+w}{1-w}$ , ou encore  $w = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$  avec

$w = jv$ , et  $v = \tan\left(\frac{T_e}{2}\omega\right) = \tan\left(\pi \frac{\omega}{\omega_e}\right)$  la pseudo-pulsation sans unité. On rappelle que  $z = e^{j\omega T_e}$ .

### Transformation de Tustin

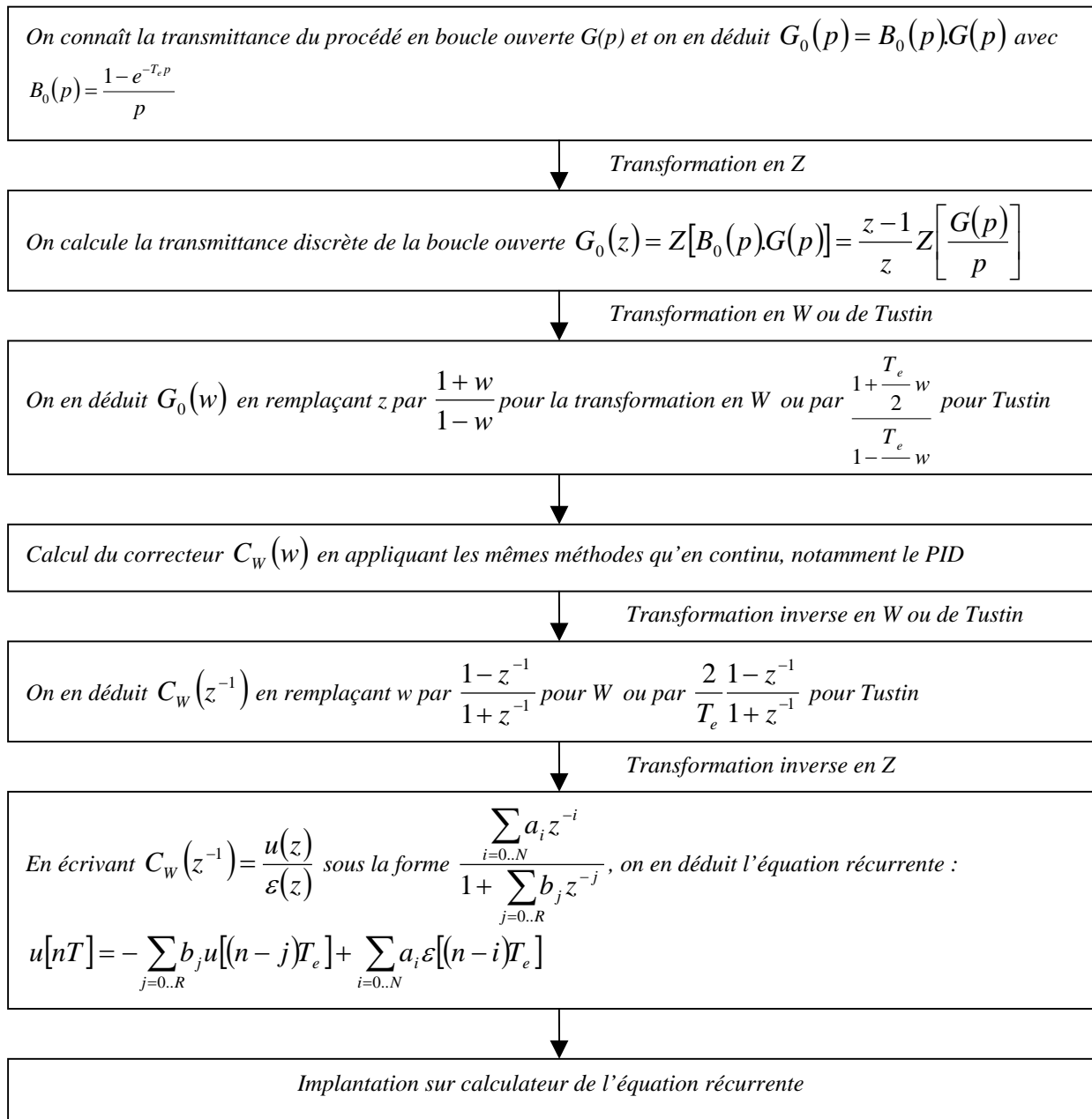
De la même façon, la transformation de Tustin s'exprime de la façon suivante :  $z = \frac{1 + \frac{T_e}{2}w'}{1 - \frac{T_e}{2}w'}$ , ou encore

$w' = \frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ , avec  $w' = jv'$ , et  $v' = \frac{2}{T_e} \tan\left(\frac{T_e}{2}\omega\right) = \frac{\omega_e}{\pi} \tan\left(\pi \frac{\omega}{\omega_e}\right)$  la véritable pulsation en rad/s.

### Méthodologie de synthèse

La méthodologie de synthèse d'un correcteur numérique par utilisation de la transformation en W ou de Tustin est présentée par l'organigramme suivant.





### Étude de la stabilité

Le passage du domaine discret au domaine pseudo-continu par l'utilisation de la transformation bilinéaire ou de Tustin permet l'étude de la stabilité. Connaissant la transmittance en boucle ouverte dans le domaine pseudo-continu  $G_0(w)$ , l'étude de la stabilité s'effectue dans ce domaine, en appliquant les critères habituels.

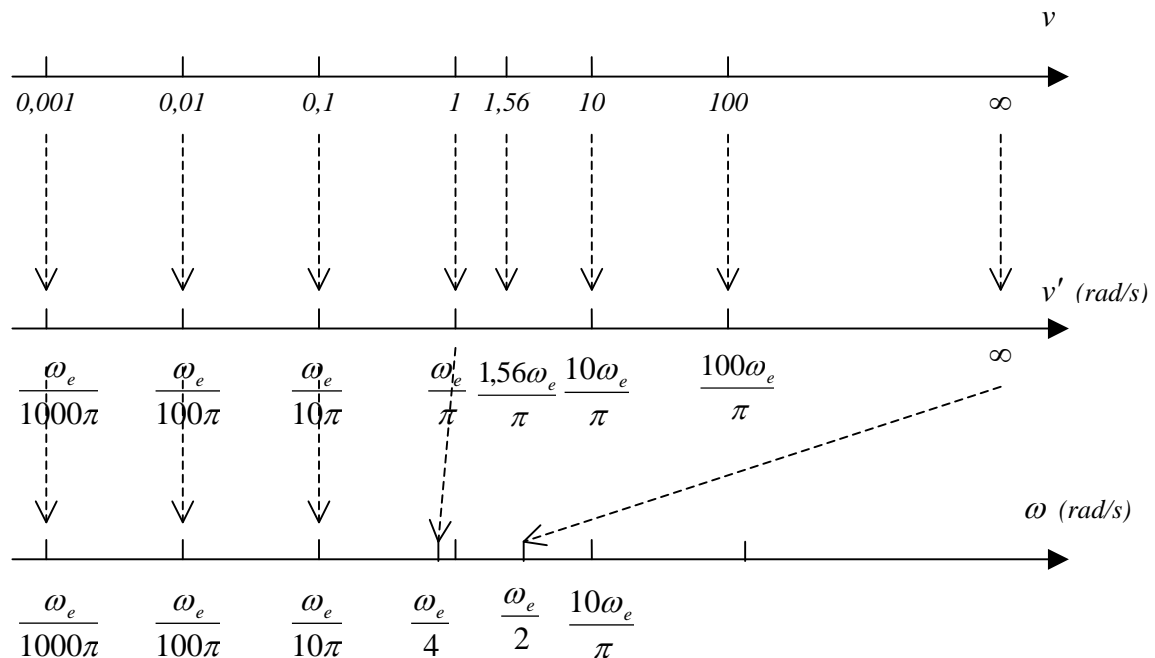
### Comparaison entre les transformations bilinéaire et de Tustin

Le schéma ci-joint présente la correspondance entre les échelles en  $\omega$ ,  $\nu$ ,  $\nu'$ . Il existe deux pulsations de repère :

- $\omega = \frac{\omega_e}{2}$ , pulsation qui indique la limite de validité de l'échantillonnage, et qui correspond à  $\nu = \infty$  et  $\nu' = \infty$  ;

$\omega = \frac{\omega_e}{4}$ , pulsation limite au delà de laquelle il n'y a plus proportionnalité entre les trois échelles et qui

correspond à  $\nu = 1$  et  $\nu' = \frac{\omega_e}{\pi}$ .



L'intérêt de la transformation de Tustin réside dans l'égalité directe entre les pseudo-pulsations  $\nu'$  et les pulsations  $\omega$  pour les faibles valeurs. L'inconvénient est que les points de repère sont dépendants de la période d'échantillonnage.

Pour la transformée en W, l'avantage est l'inconvénient sont inversés. L'intérêt réside dans la normalisation du point de repère indiquant la limite de validité de l'échantillonnage  $\nu = 1$  ; il est indépendant de la période d'échantillonnage, ce qui permet de se repérer facilement pour la synthèse. L'inconvénient est le facteur d'échelle entre les  $\nu$  et les  $\omega$ .

### Choix de la période d'échantillonnage

L'échantillonnage ne doit pas changer les caractéristiques du procédé. Pour cela, il faut que toutes les fréquences de travail soient correctement échantillonnées.

Pour la transformation en  $\Delta$ , la période d'échantillonnage  $T_e$  doit vérifier la contrainte suivante :

$100f_c \leq f_e \leq 1000f_c$  ou  $100f_u \leq f_e \leq 1000f_u$  avec  $f_c$  la fréquence de coupure et  $f_u$  la fréquence au gain unité du procédé  $G(p)$ .

Pour la transformation de Tustin et en W, cette méthode est plus générale et il n'y a pas de contrainte pour le choix de la période d'échantillonnage, mais sont plus compliqués à mettre en œuvre ; aussi dès que l'on pourra le faire on choisira d'appliquer la transformation en  $\Delta$ .