

# Transformation de Laplace

Jean Debord

30 avril 2003

## 1 Définition

Soit  $f$  une fonction du temps  $t$ . La transformée de Laplace de  $f$  est la fonction  $F$  de la variable complexe  $s$ , définie par :

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Si  $\mathcal{L}$  désigne la transformation de Laplace, on a  $F = \mathcal{L}(f)$  et  $f = \mathcal{L}^{-1}(F)$ . On utilise aussi la notation :  $f \sqsupset F$ .

On dit que  $F$  est la transformée de  $f$  et que  $f$  est l'original de  $F$ .

## 2 Propriétés

### 2.1 Linéarité

La transformée de Laplace est un opérateur linéaire :

$$\mathcal{L}(f + g) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g) \quad ; \quad \mathcal{L}(kf) = k\mathcal{L}(f)$$

où  $k$  est une constante.

### 2.2 Transformée de Laplace d'une dérivée

On démontre que :

$$\mathcal{L}(df/dt) = s\mathcal{L}(f) - f(0)$$

La dérivation est remplacée par une multiplication. Cette propriété simplifie considérablement la résolution des équations différentielles.

### 3 Transformées de quelques fonctions usuelles

#### 3.1 Fonction unité

$$f(t) = 1$$
$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[ -\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

#### 3.2 Fonction exponentielle

$$f(t) = e^{-kt}$$
$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-kt} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+k)t} dt = \left[ -\frac{e^{-(s+k)t}}{s+k} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s+k}$$

#### 3.3 Fonction créneau

Cette fonction est définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_1 \text{ ou } t > t_2 \\ 1 & \text{si } t_1 < t < t_2 \end{cases}$$

Elle est utilisée par exemple pour modéliser une injection à débit constant entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ .

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} dt = \left[ -\frac{e^{-st}}{s} \right]_{t_1}^{t_2} = \frac{e^{-st_1} - e^{-st_2}}{s}$$

Cas particulier : Si l'injection commence au temps 0 et dure un temps  $T$  ( $t_1 = 0, t_2 = T$ ) on a :

$$F(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

### 4 Recherche des originaux

Si  $F(s) = P(s)/Q(s)$  où  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes tels que :

- $\deg(P) < \deg(Q)$
- $Q$  admet  $n$  racines simples  $-r_1, -r_2, \dots, -r_n$

l'original est donné par la formule de Heaviside :

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \frac{P(-r_i)}{Q'(-r_i)} e^{-r_i t}$$

où  $Q'$  désigne la dérivée de  $Q$  par rapport à  $s$ .

En pratique,  $Q'(-r_i)$  s'obtient à partir de la forme factorisée du dénominateur :

$$Q(s) = (s + r_1)(s + r_2) \cdots (s + r_n) = \prod_{j=1}^n (s + r_j)$$

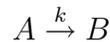
$$Q'(-r_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (r_j - r_i)$$

Dans le cas d'une fonction créneau, le numérateur contient des termes en  $1 - e^{-sT}$  : ce n'est donc plus un polynôme. On peut toutefois encore appliquer la formule de Heaviside à condition de remplacer dans l'original  $e^{-r_i T}$  par  $e^{-r_i t'}$  avec  $t' = t$  pour  $t < T$  et  $t' = T$  pour  $t \geq T$ .

## 5 Application aux réactions chimiques

### 5.1 Réaction d'ordre 1

Soit la réaction :



Soit  $a(t)$  et  $b(t)$  les concentrations des corps A et B à l'instant  $t$ . Ces concentrations sont les solutions du système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{da(t)}{dt} = -k \cdot a(t) \\ \frac{db(t)}{dt} = k \cdot a(t) \end{cases}$$

avec les conditions initiales :  $a(0) = a_0, b(0) = 0$ .

Notons  $A = \mathcal{L}(a)$  et  $B = \mathcal{L}(b)$  les transformées de Laplace. Le système devient :

$$\begin{cases} s \cdot A(s) - a_0 = -k \cdot A(s) \\ s \cdot B(s) = k \cdot A(s) \end{cases}$$

La première équation donne :

$$A(s) = \frac{a_0}{s + k} \quad \Rightarrow \quad a(t) = a_0 e^{-kt}$$

En remplaçant dans la deuxième équation :

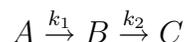
$$B(s) = \frac{ka_0}{s(s+k)}$$

Appliquons la formule de Heaviside. Le dénominateur est  $Q(s) = s(s+k)$ . Ses racines sont 0 et  $-k$ . On a  $Q'(0) = k$  et  $Q'(-k) = -k$ . L'original est donc :

$$b(t) = ka_0 \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k} e^{-kt} \right) = a_0(1 - e^{-kt})$$

## 5.2 Réactions successives

Soit les réactions :



Soit  $a(t)$ ,  $b(t)$  et  $c(t)$  les concentrations des corps A, B et C à l'instant  $t$ . Ces concentrations sont les solutions du système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{da(t)}{dt} = -k_1 \cdot a(t) \\ \frac{db(t)}{dt} = k_1 \cdot a(t) - k_2 \cdot b(t) \\ \frac{dc(t)}{dt} = k_2 \cdot b(t) \end{cases}$$

avec les conditions initiales :  $a(0) = a_0, b(0) = c(0) = 0$ .

Notons  $A = \mathcal{L}(a)$ ,  $B = \mathcal{L}(b)$ , et  $C = \mathcal{L}(c)$  les transformées de Laplace. Le système devient :

$$\begin{cases} s \cdot A(s) - a_0 = -k_1 \cdot A(s) \\ s \cdot B(s) = k_1 \cdot A(s) - k_2 \cdot B(s) \\ s \cdot C(s) = k_2 \cdot B(s) \end{cases}$$

La première équation se résout comme dans le cas précédent :

$$A(s) = \frac{a_0}{s+k_1} \quad \Rightarrow \quad a(t) = a_0 e^{-k_1 t}$$

En remplaçant dans la deuxième équation :

$$B(s) = \frac{k_1 a_0}{(s+k_1)(s+k_2)}$$

Le dénominateur est  $Q(s) = (s + k_1)(s + k_2)$ . Ses racines sont  $-k_1$  et  $-k_2$ . On a  $Q'(-k_1) = k_2 - k_1$  et  $Q'(-k_2) = k_1 - k_2$ . L'original est donc :

$$b(t) = k_1 a_0 \left( \frac{1}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} + \frac{1}{k_1 - k_2} e^{-k_2 t} \right) = \frac{k_1 a_0}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t})$$

En remplaçant  $B(s)$  par sa valeur dans la troisième équation on obtient :

$$C(s) = \frac{k_1 k_2 a_0}{s(s + k_1)(s + k_2)}$$

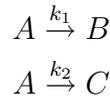
Le dénominateur est  $Q(s) = s(s + k_1)(s + k_2)$ . Ses racines sont  $0$ ,  $-k_1$  et  $-k_2$ . On a  $Q'(0) = k_1 k_2$ ,  $Q'(-k_1) = (-k_1)(k_2 - k_1)$ ,  $Q'(-k_2) = (-k_2)(k_1 - k_2)$ . L'original est donc :

$$c(t) = k_1 k_2 a_0 \left[ \frac{1}{k_1 k_2} - \frac{1}{k_1(k_2 - k_1)} e^{-k_1 t} - \frac{1}{k_2(k_1 - k_2)} e^{-k_2 t} \right]$$

$$c(t) = a_0 \left( 1 - \frac{k_2}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} - \frac{k_1}{k_1 - k_2} e^{-k_2 t} \right)$$

### 5.3 Réactions parallèles

Soit les réactions :



Le système d'équations différentielles s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{da(t)}{dt} = -(k_1 + k_2) \cdot a(t) \\ \frac{db(t)}{dt} = k_1 \cdot a(t) \\ \frac{dc(t)}{dt} = k_2 \cdot a(t) \end{cases}$$

avec les conditions initiales :  $a(0) = a_0$ ,  $b(0) = c(0) = 0$ .

Passons aux transformées de Laplace :

$$\begin{cases} s \cdot A(s) - a_0 = -(k_1 + k_2) \cdot A(s) \\ s \cdot B(s) = k_1 \cdot A(s) \\ s \cdot C(s) = k_2 \cdot A(s) \end{cases}$$

La première équation donne :

$$A(s) = \frac{a_0}{s + (k_1 + k_2)} \quad \Rightarrow \quad a(t) = a_0 e^{-(k_1 + k_2)t}$$

En remplaçant dans la deuxième équation :

$$B(s) = \frac{k_1 a_0}{s(s + k_1 + k_2)}$$

Les racines du dénominateur sont 0 et  $-(k_1 + k_2)$ . En appliquant la formule de Heaviside on obtient :

$$b(t) = k_1 a_0 \left[ \frac{1}{k_1 + k_2} - \frac{1}{k_1 + k_2} e^{-(k_1 + k_2)t} \right] = \frac{k_1 a_0}{k_1 + k_2} [1 - e^{-(k_1 + k_2)t}]$$

On obtiendrait de même pour C :

$$c(t) = \frac{k_2 a_0}{k_1 + k_2} [1 - e^{-(k_1 + k_2)t}]$$