Transformation de Laplace

Jean Debord

30 avril 2003

1 Définition

Soit f une fonction du temps t. La transformée de Laplace de f est la fonction F de la variable complexe s, définie par :

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Si $\mathcal{L}$ désigne la transformation de Laplace, on a $F = \mathcal{L}(f)$ et $f = \mathcal{L}^{-1}(F)$. On utilise aussi la notation : $f \sqsupset F$.

On dit que F est la transformée de f et que f est l'original de F.

2 Propriétés

2.1 Linéarité

La transformée de Laplace est un opérateur linéaire :

$$\mathcal{L}(f+g) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g) \quad ; \quad \mathcal{L}(kf) = k\mathcal{L}(f)$$

où k est une constante.

2.2 Transformée de Laplace d'une dérivée

On démontre que :

$$\mathcal{L}(df/dt) = s\mathcal{L}(f) - f(0)$$

La dérivation est remplacée par une multiplication. Cette propriété simplifie considérablement la résolution des équations différentielles.

3 Transformées de quelques fonctions usuelles

3.1 Fonction unité

$$f(t) = 1$$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^\infty = \frac{1}{s}$$

3.2 Fonction exponentielle

$$f(t) = e^{-kt}$$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-kt} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s+k)t} dt = \left[-\frac{e^{-(s+k)t}}{s+k} \right]_0^\infty = \frac{1}{s+k}$$

3.3 Fonction créneau

Cette fonction est définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_1 \text{ ou } t > t_2 \\ 1 & \text{si } t_1 < t < t_2 \end{cases}$$

Elle est utilisée par exemple pour modéliser une injection à débit constant entre les instants t_1 et t_2.

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_{t_1}^{t_2} = \frac{e^{-st_1} - e^{-st_2}}{s}$$

Cas particulier : Si l'injection commence au temps 0 et dure un temps T ($t_1 = 0, t_2 = T$) on a :

$$F(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

4 Recherche des originaux

Si $F(s) = P(s)/Q(s)$ où P et Q sont deux polynômes tels que :

- $deg(P) < deg(Q)$
- Q admet n racines simples $-r_1, -r_2, \cdots, -r_n$

l'original est donné par la formule de Heaviside :

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(-r_i)}{Q'(-r_i)} e^{-r_i t}$$

où Q' désigne la dérivée de Q par rapport à s.

En pratique, $Q'(-r_i)$ s'obtient à partir de la forme factorisée du dénominateur :

$$Q(s) = (s + r_1)(s + r_2) \cdots (s + r_n) = \prod_{j=1}^{n} (s + r_j)$$

$$Q'(-r_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (r_j - r_i)$$

Dans le cas d'une fonction créneau, le numérateur contient des termes en $1 - e^{-sT}$: ce n'est donc plus un polynôme. On peut toutefois encore appliquer la formule de Heaviside à condition de remplacer dans l'original $e^{-r_i T}$ par $e^{-r_i t'}$ avec $t' = t$ pour $t < T$ et $t' = T$ pour $t >= T$.

5 Application aux réactions chimiques

5.1 Réaction d'ordre 1

Soit la réaction :

$$A \xrightarrow{k} B$$

Soit $a(t)$ et $b(t)$ les concentrations des corps A et B à l'instant t. Ces concentrations sont les solutions du système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{da(t)}{dt} = -k \cdot a(t) \\ \\ \frac{db(t)}{dt} = k \cdot a(t) \end{cases}$$

avec les conditions initiales : $a(0) = a_0, b(0) = 0$.

Notons $A = \mathcal{L}(a)$ et $B = \mathcal{L}(b)$ les transformées de Laplace. Le système devient :

$$\begin{cases} s \cdot A(s) - a_0 & = & -k \cdot A(s) \\ s \cdot B(s) & = & k \cdot A(s) \end{cases}$$

La première équation donne :

$$A(s) = \frac{a_0}{s + k} \qquad \Rightarrow \qquad a(t) = a_0 e^{-kt}$$

En remplaçant dans la deuxième équation :

$$B(s) = \frac{ka_0}{s(s+k)}$$

Appliquons la formule de Heaviside. Le dénominateur est $Q(s) = s(s+k)$. Ses racines sont 0 et $-k$. On a $Q'(0) = k$ et $Q'(-k) = -k$. L'original est donc :

$$b(t) = ka_0 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k} e^{-kt} \right) = a_0(1 - e^{-kt})$$

5.2 Réactions successives

Soit les réactions :

$$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$$

Soit $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ les concentrations des corps A, B et C à l'instant t. Ces concentrations sont les solutions du système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{da(t)}{dt} = -k_1 \cdot a(t) \\ \\ \frac{db(t)}{dt} = k_1 \cdot a(t) - k_2 \cdot b(t) \\ \\ \frac{dc(t)}{dt} = k_2 \cdot b(t) \end{cases}$$

avec les conditions initiales : $a(0) = a_0, b(0) = c(0) = 0$.

Notons $A = \mathcal{L}(a)$, $B = \mathcal{L}(b)$, et $C = \mathcal{L}(c)$ les transformées de Laplace. Le système devient :

$$\begin{cases} s \cdot A(s) - a_0 & = & -k_1 \cdot A(s) \\ s \cdot B(s) & = & k_1 \cdot A(s) - k_2 \cdot B(s) \\ s \cdot C(s) & = & k_2 \cdot B(s) \end{cases}$$

La première équation se résout comme dans le cas précédent :

$$A(s) = \frac{a_0}{s + k_1} \qquad \Rightarrow \qquad a(t) = a_0 e^{-k_1 t}$$

En remplaçant dans la deuxième équation :

$$B(s) = \frac{k_1 a_0}{(s + k_1)(s + k_2)}$$

Le dénominateur est $Q(s) = (s+k_1)(s+k_2)$. Ses racines sont $-k_1$ et $-k_2$. On a $Q'(-k_1) = k_2 - k_1$ et $Q'(-k_2) = k_1 - k_2$. L'original est donc :

$$b(t) = k_1 a_0 \left(\frac{1}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} + \frac{1}{k_1 - k_2} e^{-k_2 t} \right) = \frac{k_1 a_0}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t})$$

En remplaçant B(s) par sa valeur dans la troisième équation on obtient :

$$C(s) = \frac{k_1 k_2 a_0}{s(s+k_1)(s+k_2)}$$

Le dénominateur est $Q(s) = s(s+k_1)(s+k_2)$. Ses racines sont 0, $-k_1$ et $-k_2$. On a $Q'(0) = k_1 k_2, Q'(-k_1) = (-k_1)(k_2 - k_1)$, $Q'(-k_2) = (-k_2)(k_1 - k_2)$. L'original est donc :

$$c(t) = k_1 k_2 a_0 \left[\frac{1}{k_1 k_2} - \frac{1}{k_1(k_2 - k_1)} e^{-k_1 t} - \frac{1}{k_2(k_1 - k_2)} e^{-k_2 t} \right]$$

$$c(t) = a_0 \left(1 - \frac{k_2}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} - \frac{k_1}{k_1 - k_2} e^{-k_2 t} \right)$$

5.3 Réactions parallèles

Soit les réactions :

$$A \xrightarrow{k_1} B$$
$$A \xrightarrow{k_2} C$$

Le système d'équations différentielles s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{da(t)}{dt} = -(k_1 + k_2) \cdot a(t) \\ \\ \frac{db(t)}{dt} = k_1 \cdot a(t) \\ \\ \frac{dc(t)}{dt} = k_2 \cdot a(t) \end{cases}$$

avec les conditions initiales : $a(0) = a_0, b(0) = c(0) = 0$.

Passons aux transformées de Laplace :

$$\begin{cases} s \cdot A(s) - a_0 & = & -(k_1 + k_2) \cdot A(s) \\ s \cdot B(s) & = & k_1 \cdot A(s) \\ s \cdot C(s) & = & k_2 \cdot A(s) \end{cases}$$

La première équation donne :

$$A(s) = \frac{a_0}{s + (k_1 + k_2)} \qquad \Rightarrow \qquad a(t) = a_0 e^{-(k_1+k_2)t}$$

En remplaçant dans la deuxième équation :

$$B(s) = \frac{k_1 a_0}{s(s + k_1 + k_2)}$$

Les racines du dénominateur sont 0 et $-(k_1+k_2)$. En appliquant la formule de Heaviside on obtient :

$$b(t) = k_1 a_0 \left[\frac{1}{k_1 + k_2} - \frac{1}{k_1 + k_2} e^{-(k_1+k_2)t} \right] = \frac{k_1 a_0}{k_1 + k_2} \left[1 - e^{-(k_1+k_2)t} \right]$$

On obtiendrait de même pour C :

$$c(t) = \frac{k_2 a_0}{k_1 + k_2} \left[1 - e^{-(k_1+k_2)t} \right]$$