ENSEIRB 1ière année, 2003/2004, filière informatique

EXAMEN DU MODULE IF101

Lundi 19 janvier 2004

Durée 2h, documents autorisés, livres interdits

1. On considère les algorithmes de tri rapide ou par sélection et par insertion Donner un ordre de grandeur des nombres de comparaisons et des nombres d'échanges effectués par ces deux tris, dans les cas pertinents. Comparer leur performance dans le cas où la suite est déjà triée, et dans celui où elle triée dans l'ordre inverse.

   On s'intéresse à des suites de données de grande taille, dont le déplacement est coûteux, et l'on souhaite adapter un algorithme de tri à ce cas en minimisant les échanges de ces données. Proposer une solution à ce problème et écrire l'algorithme correspondant à partir d'un des deux tris précédents. (Indication : on pourra utiliser un tableau supplémentaire).

2. On s'intéresse à l'implémentation efficace d'une arithmétique des polynômes : addition, calcul de la valeur et multiplication.

   - **Addition**
     - Écrire une fonction ADD-POL1 admettant deux polynômes représentés sous forme de tableaux en paramètres et renvoyant en résultat un polynôme qui est la somme des paramètres.
     - On souhaite représenter les polynômes sous forme de liste chaînée à raison d'un noeud de liste par coefficient. Proposer une signature pour ce type abstrait POLYNÔME2 et l'implémenter. On écrira en particulier une fonction ADD-POL2 réalisant l'addition de deux polynômes ainsi représentés.
     - On souhaite améliorer l'algorithme précédent en ne représentant dans la liste que les coefficients non nuls du polynôme. Décrire ce nouveau type abstrait POLYNÔME3 et l'implémenter. On écrira en particulier l'implémentation de la fonction d'insertion et la fonction ADD-POL3 s'appliquant à des polynômes ainsi représentés.
     - Discuter de l'intérêt de ces trois algorithmes.
   - **Valeur d'un polynôme**
     - On souhaite implémenter le calcul de la valeur d'un polynôme par la méthode de Horner. Par exemple, le polynôme suivant :

       $$p(x) = x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 2x + 1$$

       sera calculé comme suit :

       $$p(x) = x(x(x(x + 3) - 6) + 2) + 1$$

Écrire les fonctions VALEUR1, VALEUR2 et VALEUR3 calculant la valeur d'un polynôme représenté respectivement sous forme de tableau, du type POLYNÔME2 et POLYNÔME3.

- Évaluer le nombre de multiplications et d'additions nécessaires au calcul de la valeur d'un polynôme de degré N dans les trois cas de représentation, par la méthode de Horner.

- **Multiplication polynômiale**
  - On désire calculer le produit $p(x)q(x)$ de deux polynômes donnés $p(x)$ et $q(x)$. L'algorithme naïf de calcul consiste à multiplier chacun des termes de $p(x)$ par tous les termes de $q(x)$. Combien de multiplications effectue l'algorithme naïf dans le pire des cas pour des polynômes de degré N-1?
  - Pour diminuer le nombre de multiplications, on scinde les polynômes en deux demi polynômes. Étant donné un polynôme de degré N-1, on prend les N/2 (on supposera que N est pair) premiers coefficients pour le premier polynôme, soit $p_g(x)$, et les N/2 derniers pour le second, soit $p_d(x)$.

    $$p_g(x) = p_0 + p_1 x + ... + p_{N/(2-1)} x^{N/2-1},\ p_d(x) = p_{N/2} + p_{N/2+1} x + ... + p_{N-1} x^{N/2-1}$$

    en scindant $q(x)$ de la même façon, on obtient

    $$p(x) = p_g(x) + x^{N/2} p_d(x),\ q(x) = q_g(x) + x^{N/2} q_d(x)$$

    Le produit s'exprime donc

    $$p(x)q(x) = p_g(x)q_g(x) + (p_g(x)q_d(x) + p_d(x)q_g(x))x^{N/2} + p_d(x)q_d(x)x^N$$

    Le produit cherché s'obtient ainsi

    $$p(x)q(x) = r_g(x) + (r_m(x) - r_g(x) - r_d(x))x^{N/2} + r_d(x)x^N$$

    avec

    $$r_g(x) = p_g(x)q_g(x),\ r_d(x) = p_d(x)q_d(x),\ r_m(x) = (p_g(x) + p_d(x))(q_g(x) + q_d(x))$$

    Écrire une fonction récursive réalisant ce calcul, en prenant deux arguments polynômes dans une représentation quelconque (tableau ou liste).
  - Calculer le nombre de multiplications maximum nécessaires pour effectuer le calcul de produit de deux polynômes décrit précédement. Combien de multiplications seraient nécessaires si le calcul se basait sur les quatre multiplications des 4 demi polynômes ($p_g(x)q_g(x)$, $p_g(x)q_d(x)$, $p_d(x)q_g(x)$, $p_d(x)q_d(x)$) au lieu de trois?

- **Multiplication de matrices**

  On s'interesse à une représentation de matrices ne contenant que les termes non nuls. Chaque élément d'une matrice est représenté par un noeud à une valeur et deux liens : l'un réference le prochain élément non nul de la même ligne, et l'autre réference le prochain élément non nul de la même colonne. Ainsi la matrice suivante ((1,0,0,2), (0,0,3,0), (1,0,0,2)) peut être représentée par les noeuds : n11 = ((1,1,1), n14, n31), n14 = ((2,1,4), nil, n34), n23 = ((3,2,3), nil, nil), n31 = ((1,3,1), n34, nil), n24 = ((2,2,4), nil, nil).

  Définir ce type abstrait incluant la multiplication de deux matrices.