Probabilités et Statistiques

Feuille d'exercices numéro 2

Variables aléatoires discrètes

1. On lance deux dés normaux à 6 faces. Quelle est la probabilité que le premier dé donne 5 ? Que la somme des deux soit au moins égale à 9 ? Que la somme des deux soit au moins égale à 9, sachant que le premier dé donne 5 ? Que le premier dé donne 5, sachant que la somme est au moins égale à 9 ?
2. Une variable aléatoire X suit la loi suivante : X vaut -1 avec probabilité 0.3, 0 avec probabilité 0.6, et 1 avec probabilité 0.1. Quelle est la loi de X^2 ? Peut-on décrire une variable aléatoire Y, dont la loi ne soit pas la même que celle de X, et telle que Y^2 ait la même loi que X^2 ?
3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, X suivant la loi géométrique de paramètre p, et Y la loi géométrique de paramètre q. On pose $X = \min(X, Y)$; déterminer la loi de Z.
4. On lance un dé à 6 faces. Quelle est l'espérance du résultat ? Quelle est sa variance ? On lance trois dés à 6 faces ; quelle est l'espérance de la somme des résultats ? quelle est sa variance ?
5. Dans un casino, une machine fonctionne de la manière suivante : elle comporte trois roues, chacune numérotée de 0 à 9. À chaque partie, les trois roues tournent et s'arrêtent chacune indépendamment sur un chiffre aléatoire uniforme. Si les trois chiffres obtenus sont différents, le joueur perd sa mise ; s'il y a un "double", le joueur gagne 4 euros ; enfin, s'il obtient un "triple", le joueur gagne x euros. La partie coûte 2 euros.
   – Calculer la probabilité d'obtenir un triple, et celle d'obtenir un double.
   – Calculer, en fonction de x, l'espérance et la variance du gain du joueur.
   – À partir de quelle valeur de x le jeu devient-il non rentable pour la banque ?
6. Dans certains jeux de rôle, on utilise des dés à 10 faces de la manière suivante : *lorsque le dé donne* 10*, on le relance et on ajoute le résultat obtenu ; si on obtient de nouveau un* 10*, on continue à ajouter les résultats jusqu'à ce qu'un nombre inférieur à* 10 *soit tiré.* Appelons le résultat de cette procédure, un *lancer de dé ouvert.*
   (a) Quelle est la probabilité qu'un lancer de dé ouvert donne 5 ? 12 ? 20 ?
   (b) Donner, en fonction de n, la probabilité qu'un lancer de dé ouvert donne n.
   (c) Quelle est la valeur moyenne d'un lancer de dé ouvert ?
7. Un ivrogne se déplace "au hasard" : toutes les secondes, il effectue soit un pas vers le Nord-Est (avec probabilité p), soit un pas vers le Nord-Ouest (avec probabilité $1 - p$). Ses pas sont indépendants. On considère la variable aléatoire X égale au nombre de pas Nord-Est effectués parmi les n premiers pas. Quelle est la loi de X ? Quelle est la loi de l'abscisse de notre "promeneur" au bout de n pas ?
8. On joue à pile ou face $2n$ fois de suite. Soit X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le i-ème lancer donne Pile, et 0 sinon. On pose $S = \sum_{i=1}^{2n} X_i$.
   (a) Calculer la série génératrice de probabilités de S, et extraire le coefficient du terme de degré n.
   (b) En déduire la probabilité de l'événement "on obtient exactement autant de fois Pile que Face".

(c) **(Estimation)** Utiliser la “formule de Stirling” :

$$k! = \sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k (1 + O(1/k))$$

pour trouver une estimation asymptotique de cette probabilité lorsque n devient grand.

9. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, X étant une variable aléatoire géométrique de paramètre p, et Y une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ. On pose $Z = X^Y$.

   Déterminer à quelles conditions (sur p et λ) Z admet une espérance, et, le cas échéant, calculer cette espérance.

10. Un programme informatique occupe, lors de son lancement, un espace de 1 Mo. Suite à une erreur de programmation, il a le comportement suivant : il entre dans une boucle potentiellement sans fin ; à chaque itération de la boucle, l'espace mémoire qu'il occupe est multiplié par $k > 1$, et il y a une probabilité $p < 1$ qu'il s'arrête en libérant toute la mémoire occupée.
    - On suppose que l'ordinateur sur lequel s'exécute le programme dispose d'une quantité infinie de mémoire. Quelle est la probabilité que le programme ne s'arrête jamais ?
    - Évaluer, en fonction de p et k, l'espérance de la mémoire occupée par le programme juste avant qu'il ne s'arrête.
    - Estimer pour quelles valeurs de p et k il existe un risque que le programme finisse par occuper toute la mémoire de l'ordinateur (cette question est volontairement floue).

11. N personnes arrivent une par une dans un restaurant. La première personne arrivée s'installe seule à une table ; après quoi, chaque personne qui arrive procède de la manière suivante : si k personnes sont déjà présentes, le nouvel arrivant s'installe juste à droite de chaque personne déjà présente (en poussant éventuellement les autres ; les tables sont extensibles) avec probabilité $1/(k+1)$, et s'installe seule à une nouvelle table (il y a beaucoup de tables dans le restaurant) avec probabilité $1/(k+1)$.
    - Supposons que monsieur Durand soit le k-ème arrivé, et monsieur Dupond, le ℓ-ème arrivé. Quelle est la probabilité que, lorsque les N convives sont présents, monsieur Dupond soit assis immédiatement à la droite de monsieur Durand ?
    - Soit X le nombre total de tables occupées lorsque les N convives sont présents. Donner une formule exacte et une formule asymptotique pour l'espérance de X, et pour sa variance.
    - Lorsque les N personnes sont attablées, on définit une fonction f de l'ensemble des convives dans lui-même, en décrétant que l'image d'une personne est la personne assise directement à sa droite (si quelqu'un est seul à sa table, on considère qu'il est assis à la droite de lui-même). Montrer que f est une permutation aléatoire (uniforme) de l'ensemble des convives.

12. On considère deux variables aléatoires X et Y, indépendantes, toutes deux à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Dans un premier temps, on suppose que X et Y prennent toutes les deux les valeurs -1, 0 et 1 avec probabilités strictement positives. Est-il possible que $X+Y$ et $X-Y$ soient indépendantes ? Qu'en est-il si les ensembles des valeurs que X et Y prennent avec probabilité strictement positive sont des ensembles finis quelconques ? des ensembles infinis ?