Probabilités et Statistiques

Feuille d'exercices numéro 1

Probabilités conditionnelles, indépendance

1 Indépendance

1. Soient A et B deux événements indépendants. Montrer que A et $\overline{B}$ sont indépendants.
2. Généralisation du cas précédent à plus de deux événements : soient $A_1, \ldots, A_k$, k événements indépendants, et soit $I \subset [[1, k]]$; on pose $B_i = A_i$ si $i \in I$, et $B_i = \overline{A_i}$ si $i \notin I$. Montrer que $B_1, \ldots, B_k$ sont indépendants.
3. Trois personnes arrivent quelque part dans un ordre aléatoire, chacun des ordres d'arrivée possibles étant équiprobable. Quel est l'espace de probabilités naturel correspondant ? Les événements "Alice est arrivée avant Bob" est "Charles est arrivé avant Bob" sont-ils indépendants ?
4. Arthur joue aux fléchettes ; à chaque tir, il a une probabilité p de toucher le centre, et ses lancers sont indépendants. On suppose qu'il joue une infinité de fois.
   (a) Quelle est la probabilité qu'Arthur touche exactement k fois le centre au cours de ses n premiers lancers ?
   (b) Quelle est la probabilité qu'il touche le centre pour la première fois lors du r-ème lancer ?
   (c) Quelle est la probabilité qu'il touche au moins une fois le centre au cours des n premiers lancers ?
   (d) Quelle est la probabilité qu'il ne touche jamais le centre ?
5. **("Problème du chevalier de Méré")** Lequel de ces deux événements est le plus probable :
   – "obtenir au moins une fois un six en quatre lancers de dé"
   – "obtenir au moins un double six en vingt-quatre lancers de deux dés"

2 Probabilités conditionnelles

1. Soient A, B et C trois événements quelconques d'un espace de probabilités ; on suppose seulement que les trois événements sont compatibles ($\mathbb{P}(A \cap B \cap C) > 0$). Montrer que l'on a
$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(C|A \cap B)\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A).$$
2. On dispose de deux jetons, l'un avec deux faces blanches, l'autre avec une face blanche et une face noire. On tire au sort l'un des jetons, et on le lance, observant la couleur de la face qui apparaît.
   (a) Décrire un espace de probabilités modélisant cette expérience.
   (b) On observe que la face visible du jeton lancé est blanche. Quelle est la probabilité que l'autre face soit blanche ?
   (c) Quel type de probabilité vient-on de calculer sur l'espace de probabilités de la première question ?

3. On s'intéresse à une (grande) population de moutons, dont une proportion de 0.01% est atteinte d'une certaine maladie. On dispose pour cette maladie d'un test de dépistage imparfait : lorsqu'il est administré à un mouton malade, la probabilité que le test soit positif n'est que de 0.99, et, lorsque le mouton est sain, la probabilité que le test soit positif est de 0.001.
   (a) Décrire un espace de probabilités qui pourrait modéliser cette situation.
   (b) On applique le test à un mouton pris au hasard, et le test se révèle positif. Quelle est la probabilité que le mouton soit effectivement malade ?
4. **(Un peu de dénombrements)** Soient m, n deux entiers avec $m > n$. On note $C(m, n)$ l'ensemble des mots sur les deux lettres A et B, qui comportent exactement m occurrences de A et n occurrences de B :

$$C(m, n) = \{u \in \{A, B\}^*, |u|_A = m, |u|_B = n\}.$$

   Pour tout mot $v \in \{A, B\}^*$ (pas forcément un mot de $C(m, n)$), on note $p(v) = |v|_A - |v|_B$. On munit $C(m, n)$ de la loi de probablité uniforme ; on s'intéresse à la probabilité de l'événement D, défini par

$$D = \{u \in C(m, n) : \text{pour tout mot } v, \text{ préfixe propre de } u, \ p(v) > 0\}.$$

   (a) Quel est le cardinal de $C(m, n)$? Celui de $C_B(m, n)$?
   (b) Soit $C_B(m, n)$ l'ensemble des mots de $C(m, n)$ qui commencent par la lettre B. Décrire l'événements $E = \overline{D}$, et montrer que l'on a $\mathbb{P}(E) = 2\mathbb{P}(C_B(m, n))$.
   (c) En déduire la probabilité de D.
   (d) **Application :** Lors d'une élection, les deux candidats A et B obtiennent respectivement m et n voix ; le vainqueur est A ($m > n$). Quelle est la probabilité pour que, à tout moment lors du dépouillement, ce soit A qui est en tête ?