2. La Loi Normale

Distribution uniforme sur $[a,\ b]$

$p(x) = \frac{1}{b-a}$ et $P(x) = \frac{x-a}{b-a}$

Distributions marginales de deux aléas X et Y

$p_1\,(x)\,\mathrm{dx} = d\,x \int_{-\infty}^{+\infty} p\,(x,\ y)\,d\,y$ et $p_2\,(y)\,\mathrm{dy} = d\,y \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,\,y)\,d\,x$

Indépendance de deux aléas

X et Y sont indépendants si et seulement si $p(x,\ y)\ =\ p_1\ (x).p_2\ (y)$

Moment d'ordre k et moment centré d'ordre k

$\mathrm{EX}^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k\ p(x)\,d\,x \quad (E(X-\mu))^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^k\ p(x)\,d\,x$

Variance ou moment centré d'ordre 2

$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = [E(X-\mu)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2\ p(x)\,d\,x.$

Variable centrée réduite

$T = \frac{X-\mu}{\sigma}$ avec $\mu = E(X)$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) \Rightarrow E(T) = 0$ et $\mathrm{Var}(T) = 1$

Relations fondamentales

$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
$\mathrm{Var}(a\,X + b) = a^2\ \mathrm{Var}(X)$
$E(X\,Y) = E(X)\,.\,E(Y) + \mathrm{Cov}(X\,Y)$
$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X\,Y)$
$\mathrm{Var}(X-Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) - 2\,\mathrm{Cov}(X\,Y)$

Si X et Y sont indépendants alors :

$E(X\,Y) = E(X).E(Y)$
$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$

Variable continue sur $[0,\ a]$

$p(x) = \frac{1}{a}$; $E(X) = \frac{a}{2}$; $\mathrm{Var}(X) = \frac{a^2}{12.}$

Variable de Bernouilli

$P(0) = 1 - \varpi$; $P(1) = \varpi$; $E(X) = \varpi$; $\mathrm{Var}(X) = \varpi\,(1-\varpi).$

Variable de Poisson

$p(k) = e^{-\lambda}\ \frac{\lambda^k}{k!}$; $E(X) = \lambda$; $\mathrm{Var}(X) = \lambda$

Loi normale X

$p(X=x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \Rightarrow E(X) = \mu$ et $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$

Loi normale réduite T

$T = \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow p(\,T = t\,) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{t^2}{2}} \Rightarrow E(T) = 0$ et $\mathrm{Var}(T) = 1.$

Inégalité de Bienaymé-Tchebichef

Soit X une variable aléatoire de moyenne μ et d'écart-type σ, à ceci près quelconque alors :

Prob $\{ | X - \mu | > a \} < \frac{\sigma^2}{a^2}$

Théorème central limite

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes quelconques, leurs variances étant de même ordre de grandeur alors :

$X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ tend vers une loi normale