

RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

Programmation Linéaire

(selon source : P. MOREL)

Table des matières

1	Exemple et problématique de la programmation linéaire	5
1.1	Exemple	5
1.2	Formulation générale	5
1.3	Résolution graphique de l'exemple heuristique	6
2	Formes canoniques, ou standard, d'un programme linéaire	8
2.1	Variables non signées	8
2.2	Transformation d'une contrainte égalité	8
2.3	Transformation d'une contrainte inégalité et variable d'écart	9
2.4	Relation entre max et min	9
2.5	Mise sous la forme standard	10
3	Convexité	11
3.1	Définitions et propriétés immédiates	11
3.2	Points extrémaux d'un polyèdre borné	11
4	Bases. Bases réalisables. Solutions de base	13
4.1	Base	13
4.2	Solution de base	13
4.2.1	Exemple 1	14
4.2.2	Exemple 2	15
4.3	Solutions optimales	16

5	Caractérisation des bases optimales	17
5.1	Écriture canonique par rapport à une base	17
5.2	Caractérisation des bases optimales	18
5.3	Caractérisation des bases optimales : exemple	20
5.3.1	Écriture canonique dans la base I_O	20
5.3.2	I_O non optimale	20
5.3.3	I_A non optimale	21
5.3.4	I_B non optimale	22
5.3.5	I_C optimale	22
6	Résolution des programmes linéaires	23
6.1	Méthode des tableaux	23
6.2	Méthode révisée du Simplexe	27
6.3	Convergence de l'algorithme	27
6.4	Initialisation	28
7	Analyse de sensibilité	30
7.1	Perturbation verticale	30
7.2	Cas particulier $\Delta b = e_j$. Notion de coût marginal	31
7.2.1	Interprétation économique de π	31
7.2.2	Exemple : perturbation verticale	31
7.3	Perturbation horizontale	32
8	Dualité. Post-optimisation. Sensibilité	35
8.1	Exemple	35
8.2	Dual	36
8.2.1	Problème P "sans égalité"	36
8.2.2	Problème P "avec égalité"	37
8.2.3	Solution réalisable du dual	38
8.2.4	Théorème des écarts complémentaires	39

9	Programmation linéaire en nombres entiers	40
9.1	Exemple	40
9.2	Énumération implicite (Branch and Bound)	40
9.2.1	Algorithme de Branch and Bound	41
9.2.2	Exemples d'utilisation des variables binaires	42
9.2.2.1	Exemple 1	42
9.2.2.2	Exemple 2	43
9.2.2.3	Exemple 3	44
9.2.2.4	Exemple 4 : Contraintes du type <i>Si ...alors</i>	44
9.2.2.5	Exemple 5 : Fonction économique séparable	44
10	Chaînes de Markov	46
10.1	Chaînes de Markov discrètes en temps et en espace	46
10.2	Chapman - Kolmogorov	47
10.3	Classification des états	49
10.4	Chaînes irréductibles	50
10.5	Distribution pour une chaîne irréductible apériodique	51
10.6	Chaînes de Markov avec revenus	51
10.7	Recours à la programmation linéaire	53

Chapitre 1

Exemple et problématique de la programmation linéaire

1.1 Exemple

Firme produisant du “A” et du “B”, en utilisant du “M₁”, du “M₂” et du “M₃”.

	A	B	Stocks
M ₁	2	1	8
M ₂	1	2	7
M ₃	0	1	3
GAIN	4	5	

Mise en équations : $\begin{cases} x_1 \rightarrow \text{Nbr de "A"} \\ x_2 \rightarrow \text{Nbr de "B"} \end{cases}$

$$\text{Bilan pour } M_1, M_2, M_3 : \begin{cases} (1) & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ (2) & x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ (3) & x_2 \leq 3 \\ \text{critère} & 4x_1 + 5x_2 = Z(x)_{max} \end{cases}$$

1.2 Formulation générale

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \text{Max} Z(x) = \langle c, x \rangle \\ \Omega \left[\begin{array}{l} A \cdot x \leq b \\ x \leq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

Remarques

- $\langle c, x \rangle = c \cdot x$
- $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$
- $x \geq 0 \Leftrightarrow \forall i, x_i \geq 0$
- $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / x \geq 0, A \cdot x \leq b\}$ est l'ensemble des **solutions réalisables**
- On ne suppose pas *a priori* qu'il existe un maximum.

Remarques

$\Omega = \emptyset$ Le problème n'a pas de solution réalisable.

ex : $\text{Max} Z(x) = x$ et $\Omega = \{x / x \geq 0, x \leq -1\}$

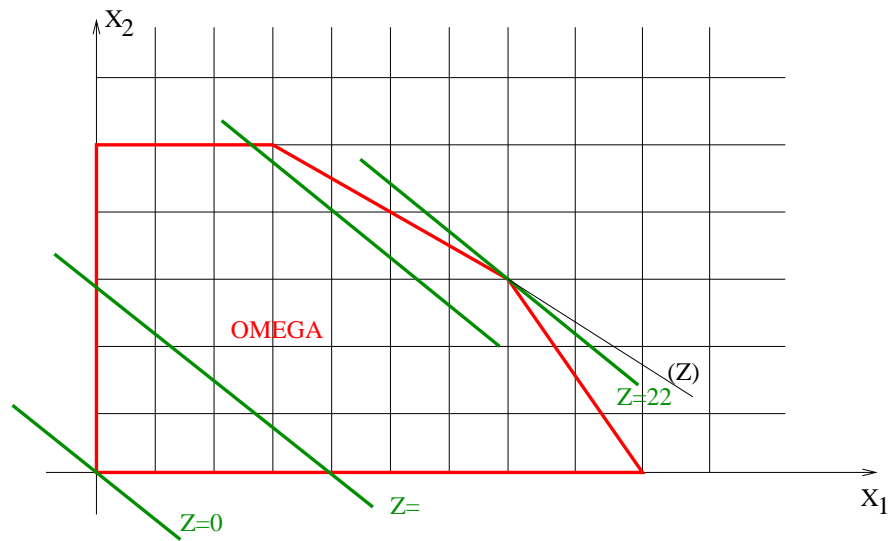
$\Omega \neq \emptyset$ Le problème a une solution optimale.

ex : $\text{Max} Z(x) = x$ et $\Omega = \{x / x \leq 0\}$

$\Omega \neq \emptyset$ $Z(x)$ est non bornée sur Ω .

ex : $\text{Max} Z(x) = x$ et $\Omega = \{x / x \geq 0\}$

1.3 Résolution graphique de l'exemple heuristique



Remarques Ω est l'intersection de $\frac{1}{2}$ espaces. Donc :

- Ω est polyédrique : facettes sommets
- Ω est connexe

On notera également que la solution n'appartient à l'intérieur de Ω , mais à la **frontière** de Ω .

De plus, un des sommets de Ω est solution optimale.

Cependant, on peut très bien avoir une infinité de solutions optimales (dans ce cas il existe une solution optimale).

Il se peut également que Ω ne soit pas borné. Dans ce cas, il n'existe pas de solution optimale à distance finie.

Chapitre 2

Formes canoniques, ou standard, d'un programme linéaire

2.1 Variables non signées

$$x \leq 0 \iff x = x' - x'' \quad \underline{\text{et}} \quad (x', x'') \geq (0, 0)^1$$

2.2 Transformation d'une contrainte égalité

$$a.x = b \iff (a.x \leq b) \quad \underline{\text{et}} \quad (-a.x \leq -b)$$

¹Au sens lexicographique

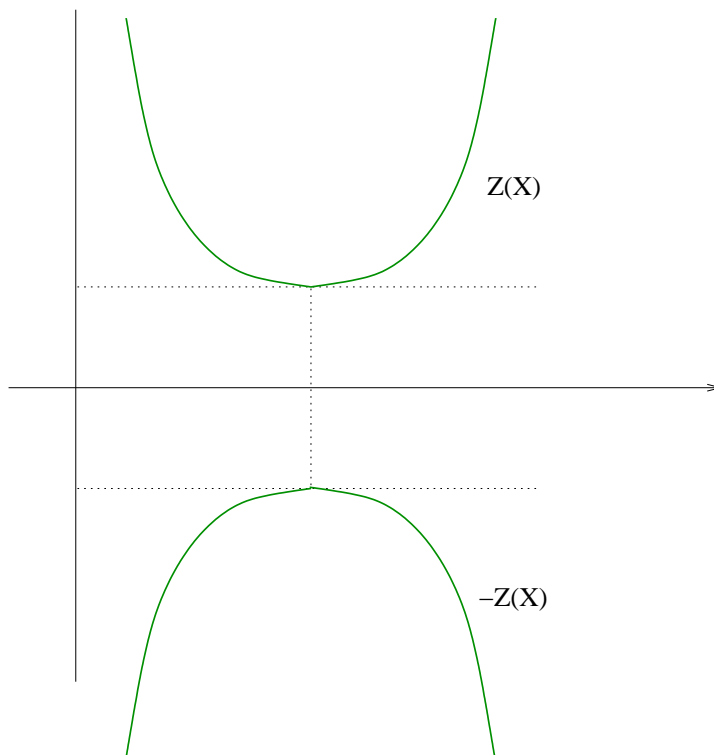
2.3 Transformation d'une contrainte inégalité et variable d'écart

$$a.x \leq b \iff (a.x + s = b) \text{ et } (s \geq 0)$$

$$a.x \geq b \iff (a.x - \sigma = b) \text{ et } (\sigma \geq 0)$$

2.4 Relation entre max et min

$$\max_{x \in \Omega} Z(x) = - \min_{x \in \Omega} (-Z(x))$$



2.5 Mise sous la forme standard

Définition 1 Un problème P est sous la forme standard ssi les “vraies contraintes” sont toutes des égalités.

$$\text{Exemple : } \begin{cases} x_1 - x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ -x_1 + 6x_2 = 10 \\ x_1 \geq 0 \\ 5x_1 - 3x_2 = W_{min} \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2' + x_2'' - x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + 3x_2' - 3x_2'' + x_4 & = & 4 \\ -x_1 + 6x_2' - 6x_2'' & = & 10 \\ \hline -5x_1 + 3x_2' - 6x_2'' & = & W_{max} \end{array}$$

Théorème 1 Tout problème linéaire peut être écrit **sous forme canonique** ou **sous forme standard**.

Définitions 2 On dit que $x = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ est une solution du problème P si $A.x = b$

Cette solution est dite **réalisable** si $A.x = b$ et $x \geq 0$

Une solution optimale de P est une solution réalisable qui donne à $Z(x) = \langle c, x \rangle$ une **valeur minimale**.

Chapitre 3

Convexité

3.1 Définitions et propriétés immédiates

- $C \subset \mathbb{R}^n$ est convexe ssi $\forall (x, y) \in C^2, \forall \lambda \in [0, 1], \lambda.x + (1 - \lambda).y \in C$
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n / \exists \alpha \in [0, 1], x = \alpha.a + (1 - \alpha).b\}$ est convexe
- $f_i(x) = \langle a_i, x \rangle$ est une forme linéaire sur \mathbb{R}^n
 $A_\alpha = \{x / f_i(x) \leq \alpha\}$ est un convexe¹
- L'intersection d'un nombre fini de convexes est convexe
- Un polyèdre convexe est l'intersection d'un nombre fini d'ensembles du type A_α

Théorème 2 *L'ensemble Ω des solutions réalisables d'un programme linéaire est convexe.*

3.2 Points extrémaux d'un polyèdre borné

Étant donnés k points, soient x^i , dans \mathbb{R}^n , on appelle combinaison linéaire convexe les x tels que : $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i . x_i$ où $\forall i \in [1, k], \lambda_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$

x est dit **point extrémal d'un convexe** (ou encore point anguleux, ou sommet) si $\exists (x^1, x^2) \in C, x^1 \neq x^2$ et $\exists \alpha \in [0, 1], x = \alpha.x^1 + (1 - \alpha).x^2$

Théorème 3 *Tout point x d'un polyèdre convexe borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est une combinaison linéaire des points extrêmes de Ω .*

¹Le " \leq " peut être remplacé par " $=$ " ou " \geq "

Remarque : Dans le cas où Ω est un polyèdre non borné, il existe un théorème analogue utilisant la notion de *rayon extrémal*.

Chapitre 4

Bases. Bases réalisables. Solutions de base

Hypothèse On suppose que dans le problème $A.x = b$, avec $x \geq 0$ et $Z_{max} = \langle c, x \rangle$, la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ est de rang maximal.

4.1 Base

Le m -uplet ordonné $I \subset \{1, \dots, k\}$, $k \leq m$, est une **base** si la matrice $A_I \in \mathcal{M}_{m,m}$, constituée des colonnes de A d'indices dans I , est régulière.

Le complément de I dans $\{1, \dots, m\}$ est noté J et est le **hors base**.

On a donc : $I \cup J = \{1, \dots, m\}$ et $I \cap J = \emptyset$

Il existe au moins une base, puisque : $\text{rang}(A) = m$

Le nombre de bases est majoré par C .

4.2 Solution de base

Soit I une base et J le hors base associé.

En partitionnant les matrices et les vecteurs suivant I et J , on peut écrire :

$$\begin{array}{ll} A.x = b & A_I X_I + A_J x_J = b \\ Z(x) = {}^t c.x & Z(x) = {}^t c_I.x_I + {}^t c_J.x_J \end{array}$$

Toute solution de P vérifie :

$$(*) \quad x_I + A_I^{-1} A_{.J} A_{.J} x_J = A_{.J}^{-1} b$$

On constate que si l'on fixe la valeur des variables hors base (*i.e.* les x_J), on obtient un second membre fixé pour un système de **Cramer**, ce qui permet de déterminer les valeurs des x_I .

On appelle **solution de base** (associée à la base I), la solution particulière de $(*)$ obtenue en posant $x_J = 0$. On a donc : $x_I = A_{.I}^{-1} b$

Une solution de base est dite **réalisable** si $x_I = A_{.I}^{-1} b \geq 0$

Une solution de base est dite **dégénérée** si x_I a des composantes nulles.

Remarque : La dégénérescence est un phénomène assez fréquent dans certains problèmes qui imposent l'utilisation de variables entières, tels les problèmes de transport, de flots, *etc* ...

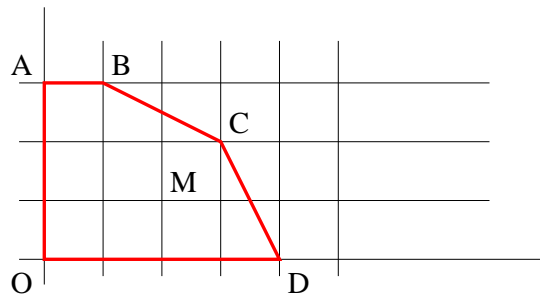
Ce phénomène est extrêmement rare quand les variables sont à composantes réelles.

Son étude étant plutôt complexe, elle ne sera pas abordée. Nous ferons ainsi l'hypothèse supplémentaire que toutes les solutions sont non dégénérées.

Théorème 4 Soit $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / A.x = b \text{ et } x \geq 0\}$ un polyèdre convexe (qui peut ne pas être borné), ce polyèdre étant l'ensemble des solutions réalisables de P .

L'ensemble des points extrémaux de Ω correspond à l'ensemble des solutions de base réalisables.

4.2.1 Exemple 1

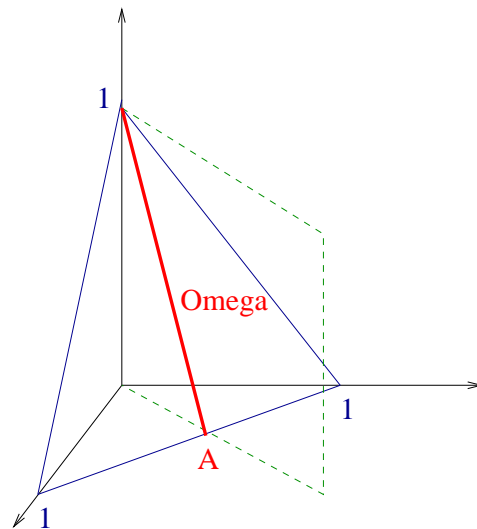


On a la matrice A suivante : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On a le tableau suivant :

Base	Point	Coordonnées					Z_{max}
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$I_O = \{3, 4, 5\}$	O	0	0	8	7	3	0
$I_A = \{2, 3, 4\}$	A	0	3	5	1	0	15
$I_B = \{1, 2, 3\}$	B	1	3	3	0	0	15
$I_C = \{1, 2, 5\}$	C	3	2	0	0	1	21
$I_D = \{1, 4, 5\}$	D	4	0	0	0	3	16

4.2.2 Exemple 2



On a : $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$

On a les matrices A et b suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

On obtient le tableau suivant :

Base	Point	Coordonnées		
		x_1	x_2	x_3
$I_O = \{1, 2\}$	A	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$I_1 = \{1, 3\}$	B	0	0	1
$I_2 = \{2, 3\}$	B	0	0	1

Il y a **dégénérescence** !

4.3 Solutions optimales

Théorème 5 *Le maximum de la forme linéaire $Z(x) = \langle c, x \rangle$ sur le polyèdre convexe $\Omega = \{x/A.x = b \text{ et } x \geq 0\} \neq \emptyset$ est :*

- *soit infini*
- *soit fini et **obtenu en au moins un point extrémal**. Si le maximum est atteint en plusieurs points extrémaux, il est atteint pour tout point combinaison linéaire convexe de ces points extrémaux.*

Chapitre 5

Caractérisation des bases optimales

5.1 Écriture canonique par rapport à une base

Soit I une base et J le hors base associé. On peut alors écrire :

$$\begin{cases} A_{.I}x_I + A_{.J}x_J = b \\ {}^t c_I x_I + {}^t c_J x_J = Z(x) \end{cases}$$

$$\text{Ainsi : } \forall y \in \mathbb{R}^m, \begin{cases} A_{.I}x_I + A_{.J}x_J = b \\ ({}^t c_I - {}^t y A_{.I})x_I + ({}^t c_J - {}^t y A_{.J})x_J = Z(x) - {}^t y b \end{cases}$$

Ce qui donne l'écriture canonique par rapport à une base suivante :

Pour la base I_O

$$\begin{array}{rcccccc} 3 & & 2.x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & = & 8 \\ 4 & & x_1 & + & 2.x_2 & & & + & x_4 & = & 7 \\ 5 & & & & x_2 & & & & + & x_5 & = & 3 \\ \hline & & 4.x_1 & + & 5.x_2 & & & & & & = & Z_O(x) \end{array}$$

Pour la base I_D

$$\begin{array}{rcccccc} 1 & & x_1 & + & \frac{1}{2}.x_2 & + & \frac{1}{2}.x_3 & & = & 4 \\ 4 & & & & \frac{3}{2}.x_2 & - & \frac{1}{2}.x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 5 & & & & x_2 & & & & + & x_5 & = & 3 \\ \hline & & 3.x_2 & - & 2.x_3 & & & & & & = & Z(x) - 16 \end{array}$$

Valeur de $Z(x)$ par diverses expressions :

– Si x coïncide avec $M = (2, 1, ?, ?, ?)$, x doit vérifier les contraintes :

$$M = (2, 1, 3, 3, 2) \quad \text{et} \quad Z(M) = 4.x_1 + 5.x_2 = 4 \times 2 + 5 \times 1 = 13$$

Ou encore : $Z_D(M) = 16 + 3.x_2 - 2.x_3 = 16 + 3 - 2 \times 3 = 13$

– Si x coïncide avec D , la solution de base est : $Z_D = 16$ et
 $Z_O = 4 \times 4 + 5 \times 0 = 16$

En choisissant y tel que ${}^t c_I - {}^t y.A.I = 0$, c'est à dire tel que : ${}^t \pi A.I = {}^t c_I^1$,
on obtient :
$$\begin{cases} x_I + A.I^{-1} A.J x_J = A.I^{-1} b \\ ({}^t c_J - {}^t \pi A.J) x_J = Z(x) - {}^t \pi b \end{cases}$$

C'est l'écriture canonique par rapport à la base I . $Z(x)$ s'exprime à l'aide d'une constante qui dépend de la base et des variables hors base.

Remarques :

On obtient le même résultat en éliminant c_I .

Par une lecture directe, on obtient la solution de base associée à I et la valeur correspondante du critère.

5.2 Caractérisation des bases optimales

Théorème 6 Soit le vecteur π défini par : ${}^t \pi A.I = {}^t c_I$

Une condition nécessaire et suffisante en l'absence de dégénérescence pour que I soit optimale est : ${}^t \bar{c}_J = {}^t c_J - {}^t \pi A.J = {}^t c_J - {}^t A.I^{-1} A.J \leq 0$

Preuve

Condition suffisante :

On sait que : $Z(x) = {}^t \pi b + {}^t c_J x_J$. Donc, sur la solution x^* de base associée à I on a : $Z(x) = Z^* = {}^t \pi b$

Pour $x \in \Omega - \{x^*\}$, on obtient : $Z(x) = Z^* + {}^t \bar{c}_J x_J$ avec ${}^t \bar{c}_J \leq 0$ et $x \geq 0$

Ainsi : $\forall x \in \Omega$, $Z(x) \leq Z(x^*)$

¹ π est le vecteur multiplicatif

Condition nécessaire :

Montrons que, s'il existe s tel que $\bar{c}_s > 0$, on peut mettre en évidence une solution meilleure.

A partir de la solution de base $x^0 = [x_I^0, x_J^0] = [A_I^{-1}b, 0]$, envisageons un déplacement dans lequel seule x_s , pour les variables hors base, est autorisée à prendre une valeur strictement positive, soit θ .

Le point $x = [x_I, X_J]$ ainsi obtenu vérifie : $x = x_J^0 + \theta.e_s = \theta.e_s$

θ doit par ailleurs être choisi de sorte que x reste réalisable, c'est à dire : $x_I = A_I^{-1}b - A_I^{-1}A_J x_J$ et $x_I \geq 0$

On définit $\bar{A}_J = A_I^{-1}A_J$, $\bar{b} = A_I^{-1}b$.

On doit donc avoir : $x_i = \bar{b} - \theta\bar{A}_s \geq 0$

Si $\bar{b} > 0$ (hypothèse de non dégénérescence), $\theta (> 0)$ peut être choisi assez petit pour que x_I demeure positif. On obtient alors :

$$Z(x) = Z(x^0) + {}^t\bar{c}_J x_J = Z(x^0) + \theta {}^t\bar{c}_J e_{Z(x)} = Z(x^0) + \theta \bar{c}_s > Z(x^0)$$

Ainsi, I n'est pas optimale.

Corollaire 7 Soient I^* une base quelconque et $x^* = [x_I^*, x_J^*]$ la solution de base correspondante. On définit le vecteur multiplicateur π par : ${}^t\pi = {}^t c_I A_I^{-1}$ et le vecteur coût relatif associé : ${}^t\bar{c}_J = {}^t c_J - {}^t\pi A_J$

S'il existe une variable hors-base x_e telle que $\bar{c}_e > 0$, on a alors :

- soit on peut augmenter indéfiniment la valeur de x_e sans sortir de l'ensemble de solutions réalisables et on a alors : $Z(x) \longrightarrow +\infty$
- soit on émet en évidence une autre base \hat{I} et une autre solution de base réalisable \hat{x} telle que : $Z(\hat{x}) > Z(x^*)$

Preuve

Comme dans la démonstration du théorème précédent, considérons pour la solution $x = [x_I, x_J]$ un déplacement défini par :

$$x_J = x_J^0 + \theta.e_e = \theta.e_e \quad \text{et} \quad x_I = \bar{b} - \theta.\bar{A}_e$$

Notons \bar{a}_{ie} , pour i variant dans $[1, m]$, les composantes de \bar{A}_e . Il y a alors deux cas :

Cas 1 : $\bar{A}_e \leq 0$

Alors x_e peut prendre une valeur aussi grande que l'on veut et on aura toujours : $x_I \geq 0$

Comme $Z(x) = Z(x^0) + \theta.\bar{c}_e$, avec $\bar{c}_e > 0$, on a bien la valeur de Z qui tend vers $+\infty$

Cas 2 : $\exists i \in [1, m]$, $\bar{a}_{ie} > 0$

Dans ce cas, θ ne peut pas augmenter indéfiniment. La plus grande valeur possible pour θ est : $\theta_{max} = \hat{\theta} = \min_{i \in [1, m]} \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ie}} = \frac{\bar{b}_s}{\bar{a}_{rs}}$

La nouvelle solution, \hat{x} a pour composantes :
$$\begin{cases} \hat{x}_J = \hat{\theta} \cdot e_e \\ \hat{x}_I = \bar{b} - \hat{\theta} \cdot \bar{A} \cdot e \end{cases}$$

On remarque que si le minimum obtenu est unique (non dégénérescence), la nouvelle solution a exactement m composantes strictement positives. \hat{x} est donc une solution de base associée à : $\hat{I} = (I - \{s\}) \cup \{e\}$

Remarque On passe d'une base à une autre dite **adjacente** : on échange deux indices.

5.3 Caractérisation des bases optimales : exemple

5.3.1 Écriture canonique dans la base I_O

$$\begin{array}{rcccccc} 3 & 2.x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & = & 8 \\ 4 & x_1 & + & 2.x_2 & & & + & x_4 & = & 7 \\ 5 & & & x_2 & & & & + & x_5 & = & 3 \\ \hline & 4.x_1 & + & 5.x_2 & & & & & & = & Z_O(x) \end{array}$$

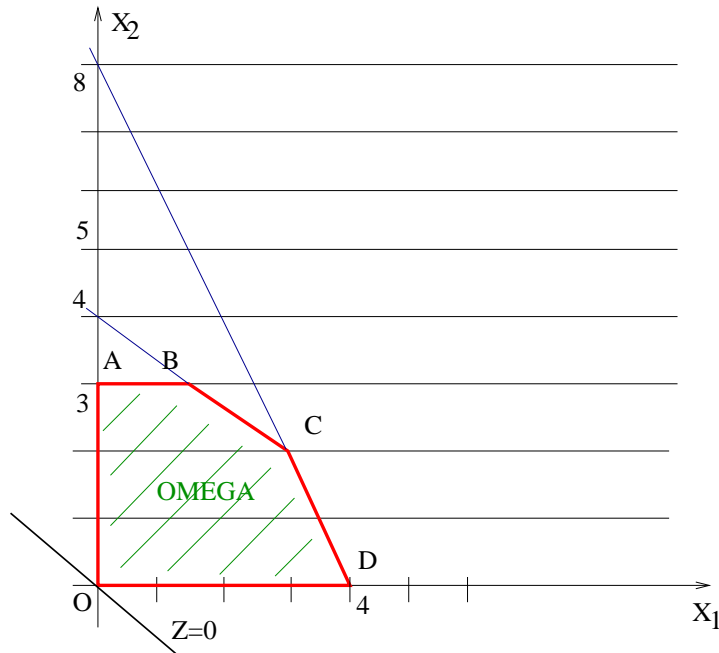
$$\text{On a alors : } \begin{cases} I_O = \{3, 4, 5\} \\ x_3^0 = 8 & x_4^0 = 7 & x_5^0 = 3 & x_1^0 = x_2^0 = 0 \\ Z_0 = 0 \end{cases}$$

5.3.2 I_O non optimale

Laissons "grandir" x_2 en maintenant les "autres" hors base à 0. On a

$$\text{alors un système réduit : } \begin{cases} x_2 + x_3 = 8 \\ 2.x_2 + x_4 = 7 \\ x_2 + x_5 = 3 \\ \hline 5.x_2 = Z(x) \end{cases}$$

$$\text{Ou encore : } \begin{cases} x_3 = 8 - x_2 \geq 0 \\ x_4 = 7 - 2.x_2 \geq 0 \\ x_5 = 3 - x_2 \geq 0 \\ Z(x) = 5.x_2 \end{cases}$$



Si x_2 grandit à partir de zéro, le point géométrique représentatif de la la solution glisse le long de l'arrête OA .

Si x_2 croît, x_3, x_4, x_5 décroissent, mais on doit tout de même les maintenir positives!! Graphiquement, on constate que l'on compare la valeur que l'on peut admettre pour x_2 par rapport à chaque contrainte. La contrainte la plus sévère fixe la valeur maximale que l'on peut admettre : $x_2 = 3 \Rightarrow x_5 = 0$

On provoque un changement de base :

$$I_0 = (\{3, 4, 5\} - \{5\}) \cup \{2\} = I_A = \{3, 4, 2\}$$

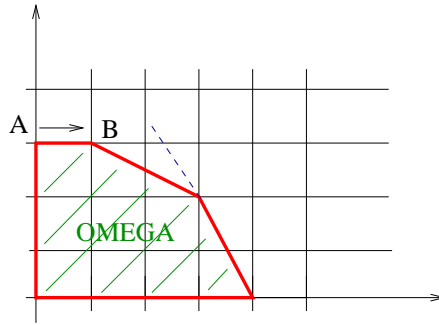
5.3.3 I_A non optimale

Écriture canonique par rapport à I_A :

$$\begin{cases} 2.x_1 & + & x_3 & & - & x_5 & = & 5 \\ x_1 & & & + & x_4 & - & 2.x_5 & = & 1 \\ & & x_2 & & & + & x_5 & = & 3 \\ \hline 4.x_1 & & & & & - & 5.x_5 & = & Z(x) \end{cases}$$

Laissons croître x_1 en laissant $x_5 = 0$. Le système réduit devient :

$$\begin{cases} 2.x_1 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_4 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 5 - 2.x_1 \geq 0 \\ x_4 = 1 - x_1 \geq 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$



On remarque que l'on "glisse" le long de la troisième contrainte jusqu'en B .

5.3.4 I_B non optimale

$$\begin{array}{cccc|c}
 3 & 1.5 & 0 & 1 & -0.5 & 0 \\
 2 & 0.5 & 1 & 0 & 0.5 & 0 \\
 5 & -0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 1 \\
 \hline
 & 1.5 & 0 & 0 & -2.5 & 0
 \end{array} \quad \Bigg\| \quad Z = 17.50$$

5.3.5 I_C optimale

$$\begin{array}{cccc|c}
 1 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 3 \\
 2 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 2 \\
 5 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 1 \\
 \hline
 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & Z = 22
 \end{array}$$

Supposons pour simplifier que $I = \{1\}$. En prémultipliant le tableau

précédent par la matrice régulière par bloc :

$$\left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & \\ \hline A_{\cdot I}^{-1} & 0 \\ \hline \hline \bar{c}_I = {}^t c_I A_{\cdot I}^{-1} & 1 \end{array} \right)$$

on obtient l'écriture canonique par rapport à I , soit :

$\begin{array}{c} 1 \\ \dots \\ 1 \end{array}$	$\bar{A}_{\cdot J} = A_{\cdot J}^{-1} A_{\cdot J}$	$\bar{b} = A_{\cdot I} b$
$0 \dots 0$	${}^t \bar{c}_I = {}^t c_J - {}^t p_I A_{\cdot J}$	$Z_I = -{}^t p_I b$

Par lecture directe, on connaît :

- la valeur du critère sur la base : Z_I
- les composantes de la solution de base
- le vecteur coût relatif pour I

De plus, **on sait si on se trouve à l'optimum.**

- o Si ${}^t \bar{c}_J > 0$, il faut utiliser un changement de base.

On suppose par exemple : $\bar{c}_e > 0$.

- o On teste la colonne \bar{A}_e .

Si $\forall i, \bar{a}_{ie} \leq 0$: fin $Z \rightarrow \infty$

- o On forme les quotients $\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ie}}$

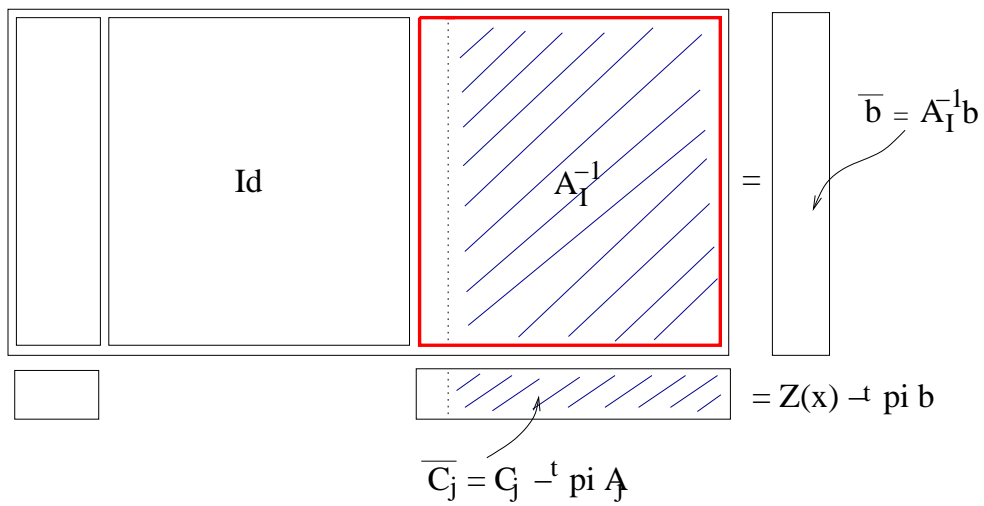
- o On détermine le plus petit.

Soit s tel que : $\frac{\bar{b}_s}{\bar{a}_{se}} = \min_{\bar{a}_{ie} > 0} \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ie}}$

(s est dite ligne du pivot, car la variable $r = I(s)$ va sortir de la base)

- o On doit effectuer un changement de base et obtenir l'écriture canonique par rapport à la nouvelle base : x_e vient remplacer x_s . Ceci correspond

Le tableau final est obtenu par une prémultiplication par A_I^{-1} :



Remarquons que :

1. A la place de la matrice identité correspondant aux variables d'écart, on a : A_I^{-1}
2. A la place de A_I , on a : Id
3. A la place de A_J , on a : $A_I^{-1} A_J$
4. Dans la ligne du critère, sous les variables d'écart, on a : $-{}^t \pi$
 En effet, on doit avoir : $\bar{c}_j = c_j - {}^t \pi A_{.j}$. Or : $c_j = 0$ et $A_{.j} = e_l$
 Donc : $\bar{c}_j = -\pi_l$

6.2 Méthode révisée du Simplexe

Le but est, contrairement à la méthode des tableaux, de revenir pour chaque itération de l'énoncé. Par ailleurs, on essaie de minimiser les calculs.

On a l'algorithme suivant :

a - Lire A, b, c

Lire I base telle que : $A_I^{-1}b \geq 0$

$k \leftarrow 0$

b - $k \leftarrow k + 1$

c - A l'itération k , soit I la base courante. Soit $x = [x_I, x_J]$ la solution de base associée.

Calculer :

$$\begin{aligned}\bar{b} &= A_I^{-1}b \\ {}^t\pi &= {}^t c_I A_I^{-1} \\ {}^t\bar{c}_J &= {}^t c_J - {}^t\pi A_{.J}\end{aligned}$$

d - Si $\bar{c}_J \leq 0$, **FIN** (l'optimum est atteint)

Si : $\exists e, \bar{c}_e > 0$, aller étape suivante.

e - Calculer : $\bar{A}_{.e} = A_I^{-1}A_{.e}$

Si $A_{.e} \leq 0$, **FIN**, l'optimum est non borné.

Sinon, calculer s tel que : $\frac{\bar{b}_{se}}{\bar{a}_{se}} = \min_{i \in [1, m]} \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ie}}$

$r = I(s)$

f - La nouvelle base est : $I \leftarrow (I - \{r\}) \cup \{e\}$

Retourner en b

6.3 Convergence de l'algorithme

Théorème 8 *Sous l'hypothèse de non dégénérescence, l'algorithme primal du simplexe converge en un nombre fini d'itérations.*

Démonstration :

Il existe un nombre fini de bases (majoré par C_n^m). Sur une base de Z , on prend une valeur fixée, soit Z_I .

Le changement de base provoque une augmentation stricte de Z . Ainsi, une base déjà visitée ne pourra pas être utilisée une seconde fois.

Remarque Les problèmes soulevés par la dégénérescence sont faciles à régler en pratique. Le plus souvent, on ne fait rien. On soit donner des règles qui font que même en présence de dégénérescence, l'algorithme termine.

Ainsi, on peut supposer que l'on a :

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 1 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 1 & \times & \times & \times \end{array} \left\| \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \right.$$

Si tous les b_i sont positifs, la base est réalisable. Si l'un au moins est négatif, on doit avoir recours à la technique des variables artificielles.

On associe au problème (P) le problème (PA) :

$$\left\{ \begin{array}{l} Ax + y = b \\ x, y, b \geq 0 \\ \bar{Z}_{max} = \langle c, x \rangle - M \cdot \sum_{i=1}^m y_i \end{array} \right.$$

avec M une constante très grande.

On résout le problème (PA) , la base de départ étant celle des colonnes de y . Le fait que chaque y_i ait un coût $-M$ assure que l'algorithme tente de faire sortir les variables artificielles de la base. Quand chaque y_v est hors base, on est, de fait, en train de résoudre le problème (P) .

6.4 Initialisation

Souvent, la base de départ n'est pas en évidence. Par ailleurs, tout au long de l'exposé nous avons supposé que $\text{rang}(A) = m$, où $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$.

La phase d'initialisation a un double but :

1. fournir un système de contraintes non redondantes, c'est à dire vérifier que $\text{rang}(A) = m$, ou indiquer les contraintes à supprimer.
2. fournir une base de départ.

Par des pivotages successifs, il est clair qu'on peut se ramener à la forme suivante pour le tableau :

1	0	0	×	×	×	×	×		×
0	1	0	×	×	×	×	×		×
0	0	1	×	×	×	×	×		×
0	0		#

Si une ligne i de 0 apparaît, soit le second membre $b_i = 0$, auquel cas la contrainte i est redondante et on la supprime, soit $b_i \neq 0$ et l'ensemble des contraintes est vide.

Chapitre 7

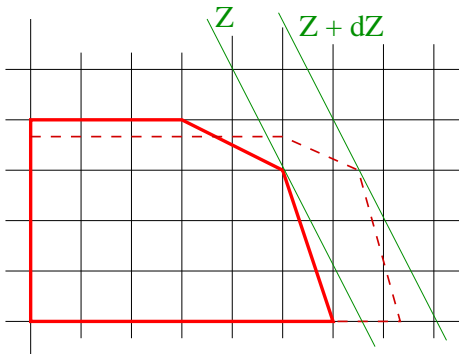
Analyse de sensibilité

On veut une étude analytique de la solution et de la valeur du critère sous une variation des données.

7.1 Perturbation verticale

On envisage le problème $P(\Delta b)$, en ayant à notre disposition la solution du problème $P(0) = P : \begin{cases} Ax = b + \Delta b \\ x \geq 0 \\ Z_{max} = \langle c, x \rangle \end{cases}$

On recrée le problème dans la base du problème **non perturbé**.



On écrit $P(\Delta b)$ sous la forme canonique dans la base optimale de $P(0)$, soit I . En effet, si Δb est suffisamment petit, la base optimale de $P(0)$ l'est également pour $P(\Delta b)$.

Remarquons que cette base étant fixée, le vecteur c_I est invariant, de même que A_I . En effet, si on écrit $P(\Delta b)$ dans la base B , on a :

$${}^t\pi = {}^t c_I A_I^{-1} \quad \underline{\text{et}} \quad {}^t\bar{c}_J = {}^t c_J - {}^t\pi A_{.J}$$

D'où l'écriture suivante pour $P(\Delta b)$:
$$\begin{cases} x_I + A_{.I}^{-1} A_{.J} x_J = A_{.I}^{-1} \cdot (b + \Delta b) \\ ({}^t c_J - {}^t\pi A_{.J}) x_J = Z(x) - {}^t\pi (b + \Delta b) \end{cases}$$

On en conclut que si I est restée réalisable¹, alors I demeure optimale. Lorsque l'on a des valeurs de Δb qui laissent I optimale et qui annulent x_J , on a pour valeur du critère : $Z[x(\Delta b)] = Z[x(0)] + {}^t\pi \Delta b$

De manière imagée, on peut écrire la formule : $\frac{\partial Z}{\partial b} = {}^t\pi$

7.2 Cas particulier $\Delta b = e_j$. Notion de coût marginal

On suppose augmenté le vecteur b sur une seule composante et d'une seule unité.

L'augmentation du critère sera donc de : $\Delta Z = {}^t\pi e_j = \pi_j$

Cette quantité est directement lisible sur le tableau final.

7.2.1 Interprétation économique de π

Il s'agit du **coût marginal du i ème bien**, c'est à dire le prix du marché d'une unité du i ème bien.

¹C'est à dire si : $A_{.I}^{-1}(b + \Delta b) \geq 0$

7.2.2 Exemple : perturbation verticale

Soit le tableau terminal suivant :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	3
2	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	2
5	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	1
	0	0	-1	-2	0	$Z - 22$

Si on accroît le stock de M_1 de une unité, soit si b_1 est augmenté de 1 ($b_1 = 8 \rightarrow b_1 = 9$), et que l'on relance le simplexe, on obtient :

$$\bar{x}_1 = 3 + \frac{2}{3} \quad \bar{x}_2 = 2 - \frac{1}{3} \quad \bar{x}_5 = 1 + \frac{1}{3} \quad \bar{x}_3 = \bar{x}_4 = 0$$

$$\bar{Z} = 23 = 22 + 1$$

Voulant augmenter notre profit de 5 unités ($Z \leftarrow Z + 5$), on décide d'augmenter le stock de M_1 de 5 unités : $\tilde{b}_1 = b_1 + 5 = 8 + 5 = 13$. On cherche à savoir quelle variation sur le stock de M_1 maintient la "même production"².

$$\begin{aligned} x_I(\Delta b) &= A_I^{-1}(b + \Delta b \times \alpha) \\ &= A_I^{-1}b + A_I^{-1}\Delta b \times \alpha \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \alpha \end{aligned}$$

$$\text{On en déduit : } \begin{cases} 3 + \frac{2\alpha}{3} \geq 0 & \Rightarrow \alpha \geq -\frac{9}{2} \\ 2 - \frac{\alpha}{3} \geq 0 & \Rightarrow \alpha \leq 6 \\ 1 + \frac{\alpha}{3} \geq 0 & \Rightarrow \alpha \geq -3 \end{cases}$$

$$\text{On voit donc : } \alpha \in \left[-\frac{9}{2}, 3 \right] \text{ et que : } M_1(\alpha) \in \left[\frac{7}{2}, 11 \right].$$

$$\text{On aura alors : } Z(\alpha) = 22 + {}^t\pi\alpha.\Delta b = 22 + \alpha.1 = 22 + \alpha \Rightarrow Z \in [17, 5; 25]$$

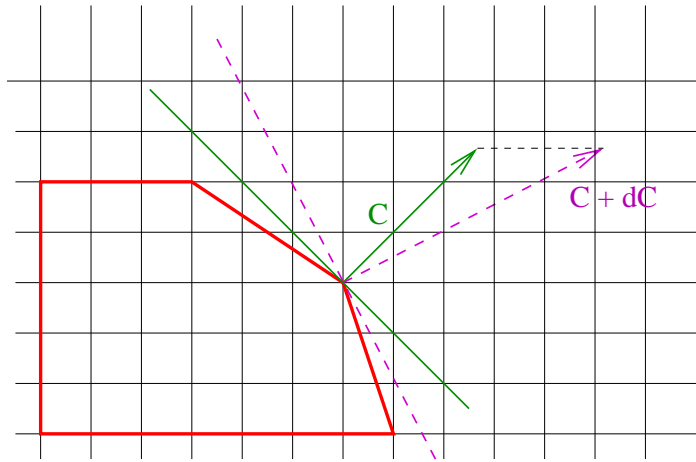
²Cas où : $\Delta b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

7.3 Perturbation horizontale

On envisage le problème $P(\delta c)$, en ayant la solution complète de $P(0)$:

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ \bar{Z}_{max} = \langle c + \delta c, x \rangle \end{cases}$$

La technique est d'écrire $P(\delta c)$ dans la base optimale de $P(0)$.



Paramétrage d'un coefficient $c_i, i \in I$

$c \rightarrow c + \delta c$. On a donc également : $\pi \rightarrow \pi + \delta \pi$

Donc : $c_B + \delta c_B = {}^t(\pi + \delta \pi) \cdot B_I \Rightarrow {}^t c_B = {}^t \pi B_I$ et ${}^t \delta c_B = {}^t \delta \pi B_I$

Et donc :

$${}^t \tilde{c}_N = {}^t(c_N + \delta c_N) - {}^t(\pi + \delta \pi) \times N = {}^t c_N - {}^t \pi N_{.j} + {}^t \delta c_N - {}^t \delta \pi \cdot N$$

$${}^t \tilde{c}_N = {}^t \bar{c}_N + {}^t \delta c_N - {}^t \delta c_N B^{-1} \cdot N$$

Ainsi : $\tilde{c}_j = \bar{c}_j + \delta c_j - {}^t c_B \bar{A}_{.j}$

Dans le cas particulier où δc est contenu dans δc_J , on a : $\Delta c_I = 0$ et donc : $\tilde{c}_j = \bar{c}_j + \delta c_j$

Exemple de perturbation horizontale

Supposons que le gain sur le "A" varie de α . Le tableau initial s'écrit :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
2	1	1	0	0	8
1	2	0	1	0	7
0	1	0	0	1	3
$4 + \alpha$	5	0	0	0	$Z(x)$

On écrit le problème perturbé dans la base optimale du problème non perturbé. On commence par prémultiplier par la matrice :

$$\left(\begin{array}{c|c} A_I^{-1} & 0 \\ \hline t\pi^* & 1 \end{array} \right)$$

On obtient :

1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	3
0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	0	2
0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	1
α	0	-1	-2	0	$Z - 22$

On n'a pas l'écriture canonique car il aurait fallu faire varier π . On effectue un pivotage :

1	0	$\frac{2}{3}$		$-\frac{1}{3}$	0	3
0	1	$-\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$	0	2
0	0	$\frac{1}{3}$		$-\frac{2}{3}$	1	1
0	0	$-1 - \frac{2\alpha}{3}$		$-2 - \left(\alpha \times \frac{-1}{3}\right)$	0	$Z - 22 - 3\alpha$

La solution $x = (3, 2, 0, 0, 1)^3$ est indépendante de α , ce qui est évident sur une solution graphique, tant que **la base reste optimale**, soit tant que :

$$-1 - \frac{2\alpha}{3} \leq 0 \quad \text{et} \quad -2 + \frac{2\alpha}{3} \leq 0$$

$$\alpha \geq -\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \alpha \leq \frac{2}{3}$$

A ce moment, on a : $Z(\alpha) = 22 + 3\alpha$

³ $x = (x_1(\alpha), x_2(\alpha), x_3(\alpha), x_4(\alpha), x_5(\alpha))$

Note

$$\tilde{c}_j = \bar{c}_j - \alpha a_{h,k} \leq 0 \quad (h = 1)$$

Donc, on a : $\alpha \geq \frac{\bar{c}_j}{a_{h,k}}$ si $a_{h,k} \geq 0$ et $\alpha \leq \frac{\bar{c}_j}{a_{h,k}}$ si $a_{h,k} \leq 0$

Ainsi, il apparaît : $\alpha \in \left[\max \left\{ \frac{\bar{c}_j}{a_{h,k}} / a_{h,k} \geq 0 \right\}, \min \left\{ \frac{\bar{c}_j}{a_{h,k}} / a_{h,k} \leq 0 \right\} \right]$

Chapitre 8

Dualité. Post-optimisation. Sensibilité

8.1 Exemple

Un RU sert trois plats différents contenant des calories et vitamines dans es proportions suivantes :

	<i>Plat 1</i>	<i>Plat 2</i>	<i>Plat 3</i>
<i>Vitamines</i>	3	4	6
<i>Calories</i>	2	5	7
<i>Prix de la portion</i>	10	11	12

Un repas “convenable” contient 100 vitamines et 200 calories au moins.

On cherche le repas convenable pour le plus bas prix.

Variables :

On note x_1, x_2, x_3 les quantités respectives, en portion, des plats 1, 2 et 3.

$$\begin{aligned} \text{Contraintes} \quad & 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq 100 \\ & 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 \geq 200 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Fonction économique

$$10x_1 + 11x_2 + 12x_3 = Z_{min}$$

Un pharmacien se met en face du RU pour le concurrencer. Il vend deux pilules : V , qui contient 1 vitamine, et C , qui contient 1 calorie. Il cherche le prix de vente de ces deux pilules de façon à maximiser son gain (*i.e.* le prix de vente maximum inférieur à celui du RU).

Variables :

Soient y_v et y_c les prix respectifs des deux pilules.

$$\text{Contraintes : } \begin{cases} y_c, y_v \geq 0 \\ 3y_v + 2y_c \leq 10 \\ 4y_v + 5y_c \leq 11 \\ 6y_v + 7y_c \leq 12 \end{cases}$$

$$\text{Fonction économique : } W_{max} = 100y_v + 200y_c$$

8.2 Dual

8.2.1 Problème P “sans égalité”

$$\text{Soit le problème } P \text{ suivant : } \begin{cases} x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq 100 \\ 2x_1 + 5x_2 + 12x_3 \geq 200 \\ Z_{max} = 10x_1 + 11x_2 + 12x_3 \end{cases}$$

(C'est le problème précédent)

$$\text{On peut l'écrire sous la forme : } \begin{cases} {}^tAx \geq c \\ x \geq 0 \\ Z_{max} = {}^tbx \end{cases} \quad \text{avec : } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Définition 3 Soit un problème P de la forme :
$$\begin{cases} {}^tAx \geq c \\ x \geq 0 \\ Z_{min} = {}^tbx \end{cases}$$

Par définition, le problème dual du problème P est noté D et est le problème suivant :
$$D \begin{cases} Ay \leq b \\ x \geq 0 \\ W_{max} = {}^tcy \end{cases}$$

Propriété 1 Le dual du problème dual est le problème primal.

Preuve :

On veut, à partir d'un problème (P), calculer le dual du problème (D), problème dual de (P). On a : $(D) \Leftrightarrow (\tilde{D}) \begin{cases} -{}^tAy \leq -c \\ y \geq 0 \\ \tilde{W}_{max} = -{}^tby \end{cases}$

Le dual de ce problème est :
$$\begin{cases} A.u \leq b \\ u \geq 0 \\ \check{W}_{max} = {}^tc.u \end{cases}$$

8.2.2 Problème P “avec égalité”

Soit le problème (P) suivant :
$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ Z_{min} = {}^tcx \end{cases}$$

On a donc : $P \Leftrightarrow \begin{cases} Ax \geq b, -Ax \leq -b \\ x \geq 0 \\ Z_{min} = {}^tcx \end{cases}$

On pose : $a = \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}$ et $\beta = \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$

On a alors : $P \Leftrightarrow \begin{cases} a.x \geq \beta \\ x \geq 0 \\ Z_{min} = {}^tcx \end{cases}$

Le dual de P est donc le problème D suivant : $D \Leftrightarrow \begin{cases} {}^ta.y \geq \beta \\ y \geq 0 \\ W_{min} = {}^t\beta y \end{cases}$

On a : ${}^t a = ({}^t A \quad -{}^t A)$, c'est à dire que a est une **matrice par blocs**.

$$\text{Donc : } D \Leftrightarrow \begin{cases} {}^t A.y' - {}^t A.y'' \geq 0 \\ y', y'' \geq 0 \\ W_{min} = {}^t b y' - {}^t b y'' \end{cases}$$

où : ${}^t y = (y' \quad y'')$

$$\text{On pose alors : } u = y' - y''. \text{ On obtient au final : } D \Leftrightarrow \begin{cases} {}^t A u \geq 0 \\ u \leq 0 \\ W_{min} = {}^t b u \end{cases}$$

Propriété 2 Soient deux problèmes P et D , D étant le dual de P . On a alors : $\forall x \in \Omega(P)$, $\forall y \in \Omega(D)$, $Z(x) \leq W(y)$

Preuve :

$$P \begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \rightarrow {}^t y.A.x \leq {}^t y.b = W(y)$$

$$D \begin{cases} {}^t A y \geq c \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow {}^t x.{}^t A.y \geq {}^t x.c = Z(x)$$

Or on a : ${}^t y.A.x = {}^t x.{}^t A.y$

Ce qui achève la démonstration.

Corollaire 9 Si $x \in \Omega(P)$, si $y \in \Omega(D)$, si $Z(x) \geq W(y)$, alors : $\begin{cases} x \text{ est grand pour } P \\ y \text{ est grand pour } P \\ Z(x) = W(y) \end{cases}$

8.2.3 Solution réalisable du dual

Soit π le vecteur multiplicateur de la base optimale d'un problème P :
 ${}^t \bar{c} = {}^t c - {}^t \pi A$

$$\text{Ceci est équivalent à : } \begin{cases} {}^t \bar{c}_B = 0 = {}^t c_B - {}^t \pi B \\ {}^t \bar{c}_N = {}^t c_N - {}^t \pi N \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{Équivalent à : } \begin{cases} {}^t c_B = {}^t \pi B \\ {}^t c_N \leq {}^t \pi N \end{cases}$$

Ainsi on a : $c \leq {}^t A$

Donc : π **est une solution réalisable du dual de P** .

8.2.4 Théorème des écarts complémentaires

Théorème 10

$$P \begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \\ Z_{max} = {}^t c x \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} A \cdot x + \xi = b \\ x, \xi \geq 0 \end{cases}$$

$$D \begin{cases} {}^t A y \geq c \\ y \geq 0 \\ W_{min} = {}^t b \cdot y \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} {}^t A \cdot y - \eta = c \\ x, \eta \geq 0 \end{cases}$$

On a alors : ${}^t y \cdot A \cdot x + {}^t y \cdot \xi = {}^t y \cdot b = W(y)$ et ${}^t x \cdot {}^t A \cdot y + {}^t x \cdot \eta = {}^t x \cdot c = Z(x)$

Donc : $W(y) - Z(x) = {}^t y \cdot \xi + {}^t x \cdot \eta$

Si x et y sont les solutions optimales de P et de D , alors :

$$Z(x) = W(y) \Rightarrow {}^t y \cdot \xi + {}^t x \cdot \eta = 0$$

Ce qui se traduit par : $\forall (i, j) \in [1, n]^2$, $y_j \cdot \xi_j = 0$ et $x_i \eta_i = 0$

Donc : $\forall (i, j) \in [1, n]^2$, $y_j \cdot (b - A \cdot x)_j = 0$ et $x_i (A \cdot y - c)_i = 0$

Cette dernière propriété est d'ailleurs une **condition nécessaire et suffisante** pour avoir x et y solutions optimales respectives de P et de D .

Chapitre 9

Programmation linéaire en nombres entiers

9.1 Exemple

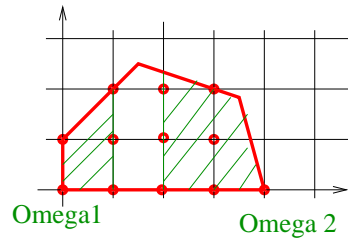
$$\left\{ \begin{array}{l} -2x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ 16x_1 - 14x_2 \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ (x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \\ Z_{max} = x_1 + x_2 \end{array} \right.$$

9.2 Énumération implicite (**Branch and Bound**)

Soit le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ (x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \\ Z_{min} = 4x_1 - 6x_2 \end{array} \right.$$

On éclate le problème en deux sous problèmes :



On travaille par rapport à la composante x_1 et on ajoute des contraintes pour exclure la bande fractionnaire $]1, 2[$.

9.2.1 Algorithme de Branch and Bound

1. Initialisation

Résoudre le problème relaxé ($Z_{min}, x \in \Omega$).

si la solution est entière, on arrête.

sinon, on cherche une borne supérieure Z_U de la fonction économique en calculant Z en un point à coordonnées entières intérieur à Ω ou bien au “pire” en prenant $Z = +\infty$

2. Séparation

- Sélectionner un des sous ensembles Ω_i de solutions (à la première itération, $\Omega_i = \Omega$)
- Sélectionner une composante non entière de la solution optimale du problème correspondant, et partitionner Ω_i en Ω'_i et Ω''_i , en ajoutant des contraintes qui excluent la partie fractionnaire de la solution choisie.

3. Évaluation

Pour chaque sous problème ($Z_{min, x \in \Omega'_i}$ et $Z_{min, x \in \Omega''_i}$), on calcule une solution optimale, soient $Z_{L'_i}$ et $Z_{L''_i}$, ou bien on obtient la preuve de l'absence de solution.

4. Stérilisation

- On examine chaque sous problème $\Omega'_i, \Omega''_i, \dots$ susceptible de contenir la solution et on stérilise un sous-ensemble particulier si :
 - a) $Z_L \geq Z_U \rightarrow$ le Ω correspondant ne peut pas contenir la solution optimale
 - b) le sous-ensemble ne contient pas de solution

c) Z_L est obtenue pour une solution entière (évaluation exacte) **et**
 $Z_L < Z_U$

Dans le cas 'c', la solution entière est dite *solution courante* et on pose : $Z_U = Z_L$

– Aller en '4' si d'autres sous-problèmes peuvent être encore stérilisés.

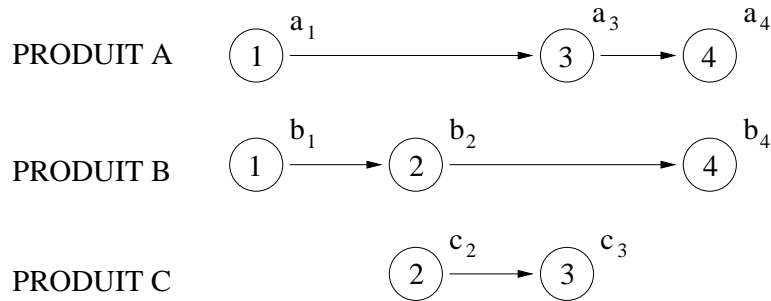
5. Test

Si tous les ensembles sont stérilisés, on arrête (la solution est alors **optimale**). Sinon, on retourne en '2' (séparation).

9.2.2 Exemples d'utilisation des variables binaires

9.2.2.1 Exemple 1

Soient trois produits fabriqués à l'aide de 4 machines différentes de la manière suivante :



On a affaire à des *contraintes disjonctives*.

On note x_{A_j} la date de début d'usinage de A sur la machine j . On définit de la même manière les variables x_{B_j} et x_{C_j} . On note a_i la fin de l'usinage de A sur la machine i , et, de même, on définit b_i et c_i .

On obtient les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} x_{A_1} + a_1 \leq x_{A_3} \\ x_{A_3} + a_3 \leq x_{A_4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{B_1} + b_1 \leq x_{B_2} \\ x_{B_2} + b_2 \leq x_{A_4} \end{cases}$$

$$x_{C_2} + a_2 \leq x_{C_3}$$

Pour la machine 1, on a :

$$x_{A_1} + a_1 \leq x_{B_1}$$

ou

$$x_{B_1} + b_1 \leq x_{A_1}$$

On introduit alors la variable $\delta_1 \in \{0, 1\}$ et M une variable très grande (“ $M = +\infty$ ”). On réécrit alors :

$$\begin{cases} x_{A_1} + a_1 - x_{B_1} \leq \delta_1 M \\ \text{et} \\ x_{B_1} + b_1 - x_{A_1} \leq (1 - \delta_1) M \end{cases}$$

De manière identique, on introduit les variables δ_2, δ_3 et δ_4 .

La fonction économique du problème est : $Z_{min} = \max\{x_{A_4} + a_4, x_{B_4} + b_4, x_{C_3} + c_3\}$

On introduit la variable u :

$$\begin{cases} x_{A_4} + a_4 \leq u \\ x_{B_4} + b_4 \leq u \\ x_{C_3} + c_3 \leq u \\ Z_{min} = u \end{cases}$$

9.2.2.2 Exemple 2

Soit $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 + x_2 = 4, (x_1 \geq 1 \text{ ou } x_2 \geq 2)\}$. On pose alors, après introduction des variables $\delta_1 \in \{0, 1\}$ et $M = “+\infty”$:

$$\Omega' : \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ 1 - x_1 \leq \delta_1.M \\ 2 - x_2 \leq (1 - \delta).M \\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

On sépare le problème en deux : $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 1 \end{cases}$

On résout alors : $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4 \leq \delta.M \\ 2 - x_2 \leq \delta.M \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 - 3 \leq (1 - \delta).M \\ x_2 - 1 \leq (1 - \delta).M \end{cases}$

9.2.2.3 Exemple 3

On dispose du problème suivant :

$$L_1(x_1, \dots, x_n) \leq 0 \quad \text{ou} \quad L_2(x_1, \dots, x_n) \leq 0 \quad \text{ou} \quad \dots \quad \text{ou} \quad L_p(x_1, \dots, x_n) \leq 0$$

(On pose $x = (x_1, \dots, x_n)$ afin de simplifier les notations)

On souhaite qu'une seule (ou bien **k**) exactement des inégalités soit vérifiée. On introduit alors les variables $\delta_i \in \{0, 1\}$ et $M = "+\infty"$ telles que :

$$\begin{cases} L_1(x) \leq (1 - \delta_1).M \\ L_2(x) \leq (1 - \delta_2).M \\ \vdots \\ L_p(x) \leq (1 - \delta_p).M \\ \sum_{i=1}^p \delta_i = 1 \quad (\text{ou bien } \mathbf{k}) \end{cases}$$

9.2.2.4 Exemple 4 : Contraintes du type *Si ... alors*

Soit le problème : *Si* $L_1(x) > 0$, *alors* $L_2(x) \geq 0$

On introduit $\delta \in \{0, 1\}$ et $M = "+\infty"$: $\begin{cases} -L_2(x) \leq \delta.M \\ L_1(x) \leq (1 - \delta).M \end{cases}$

9.2.2.5 Exemple 5 : Fonction économique séparable

On suppose que : $Z_{max} = \sum_{j=1}^n f_j(x_j)$

On suppose de plus que chaque f_j est linéaire continue par morceaux. Soient $[a_i, a_{i+1}]_{i \in [0, s-1]}$ les intervalles sur lesquels f_j est linéaire. On a alors :

$$\forall x \in [0, a_s] , \quad x = \sum_{i=1}^s \lambda_i \cdot a_i \quad \text{avec :} \quad \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1 \quad \text{et} \quad \forall i , \quad \lambda_i \geq 0$$

On notera que cette écriture **n'est pas unique**.

Si $x \in [a_i, a_{i+1}]$, on peut écrire de **manière unique** : $\begin{cases} x = \lambda_i \cdot a_i + \lambda_{i+1} \cdot a_{i+1} \\ \lambda_i + \lambda_{i+1} = 1 \\ (\lambda_i, \lambda_{i+1}) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$

On a alors : $f(x) = \lambda_i \cdot f(a_i) + \lambda_{i+1} \cdot f(a_{i+1})$. Et donc ainsi : $f(x) = \sum_{j=1}^s \lambda_j \cdot f(a_j)$

avec : $\sum_{i=1}^s \lambda_i = 1$

On notera bien que seuls **deux** des λ_j sont non nuls et qu'ils sont de plus **consécutifs**.

On introduit $z_i \in \{0, 1\}$ de sorte que $z_i = 1 \Leftrightarrow x \in [a_i, a_{i+1}]$. On introduit : $\forall i \in [1, r-1]$, $\lambda_i \leq z_i + z_{i+1}$ et on pose : $z_0 \geq \lambda_0$ et $\lambda_r \leq z_{r-1}$.

On pose alors : $\sum_{i=1}^r z_i = 1$

Chapitre 10

Chaînes de Markov

10.1 Chaînes de Markov discrètes en temps et en espace

Définition 4 Soit E un espace d'états fini : $E = \{x_1, \dots, x_n\}$. Soit P la matrice des probabilités de transition $(p_{i,j}) : p_{i,j} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$

Soit une distribution $q = (q_i)_{i \in [1,n]}$ de probabilité initiale : $\forall i \in [1, n] , q_i = P(X_0 = i)$

Remarque P est une matrice stochastique : $\forall i \in [1, n] , \sum_{j=1}^n p_{i,j} = 1$

Propriété 3 On a les propriétés suivantes :

$$- \forall i \in [1, n] , \sum_{j=1}^n p_{i,j} = 1$$

$$- P.e = e \quad \text{où : } \forall i \in [1, n] , e_i = 1$$

$\lambda = 1$ est valeur propre de P . De ce fait, toutes les autres valeurs propres de P , soient λ_k , vérifient : $|\lambda_k| \leq 1$ (ceci est une conséquence du théorème de Gerchgorin).

10.2 Chapman - Kolmogorov

On définit la matrice $P^{(k)}$ par la formule :

$$P^{(k)} = \left(p_{i,j}^{(k)} \right)_{(i,j) \in [1,n]^2} = (P(X_{n+k} = j | X_n = i))_{(i,j) \in [1,n]^2}$$

Théorème 11 On a la propriété suivante sur la matrice $P^{(k)} : \forall k \in \mathbb{N}, P^{(k)} = P^k$

Preuve :

On utilise la propriété suivante sur les probabilité :

$$P(ABC) = P(A|BC) \times P(B|C) \times P(C)^2$$

Probabilité absolue

Soit $q(n) \in \mathbb{R}^n$.

On pose : $q(k) = (q_1(k), \dots, q_n(k)) = (P(X_k = 1), \dots, P(X_k = n))$

On a donc : $q_i(1) = \sum_{l=1}^n P(X_0 = l) \cdot p_{l,i} = \sum_{l=1}^n q_l(0) \cdot P$

Ainsi : $\boxed{{}^t q(1) = {}^t q(0) \cdot P}$

Et donc : $\boxed{{}^t q(n+1) = {}^t q(n) \cdot P}$

$q(n)$ est la distribution de probabilité de la variable X_n .

Exemple

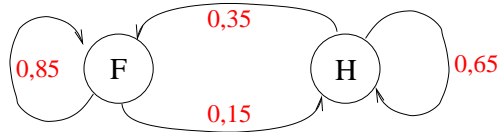
On considère me niveau de la Garonne sur 5301 jours. Il est soit faible (F), soit haut (H). On construit alors un mot de 5301 lettres. On ne peut en lire que deux lettres simultanément. On a donc 4 cas possibles lors de la lecture : FF, FH, HF, HH .

On crée alors la matrice suivante :

	F	H	
F	3077	543	3620
H	588	1092	1680

On crée alors la matrice : $P = \begin{pmatrix} \frac{3077}{3620} = 0,85 & \frac{543}{3620} = 0,15 \\ \frac{588}{1680} = 0,35 & \frac{1092}{1680} = 0,65 \end{pmatrix}$

On obtient le graphe des transitions :



Par itérations successives, on arrive à : $\forall k \geq 11, P^k = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$

On constate donc ici que : $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = P^*$, matrice dont toutes les lignes sont égales

Preuve :

La loi de X_n est ${}^tq(n) = {}^tq(0).P^n$. Supposons alors : $\exists q^* \in \mathbb{R}^n, \lim_{n \rightarrow \infty} q(n) = q^*$

Comme ${}^tq(n+1) = {}^tq(n).P$, on obtient : ${}^tq^* = {}^tq^*.P$

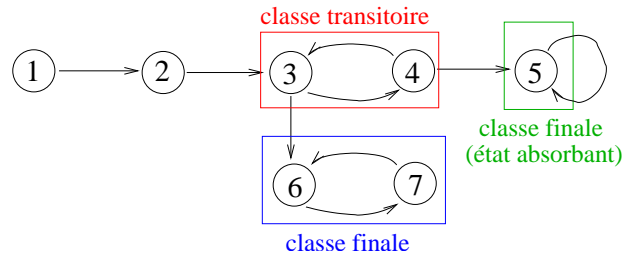
${}^tq^*$ est le vecteur propre à gauche associé à la valeur propre 1 de P

On obtient également : ${}^tq^* = {}^tq(0).P^*$

Donc, si q^* est indépendant de $q(0)$, on obtient le même q^* pour n'importe quel $q(0)$. Ainsi P a toutes ses lignes égales.

10.3 Classification des états

Soit le graphe suivant :



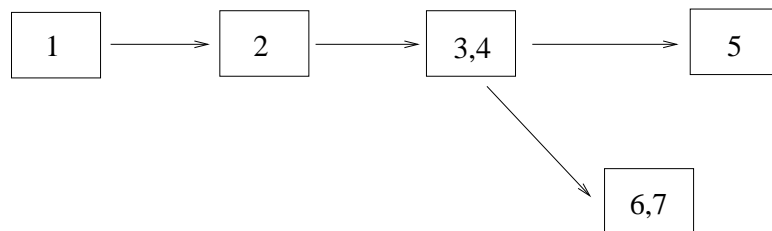
On définit les relations \mathcal{R} et \mathcal{S} par : $i \mathcal{R} j \Leftrightarrow$ il existe un chemin de i à j
 et $i \mathcal{S} j \Leftrightarrow \begin{cases} i \mathcal{R} j \\ j \mathcal{R} i \end{cases}$

On note Γ_i^* l'ensemble des états accessibles à partir de l'état i (l'état i fait partie de cet ensemble, par convention) et $\overline{\Gamma}_i^*$ l'ensemble des états qui conduisent à l'état i (l'état i fait partie de cet ensemble, par convention).

Par exemple, sur le graphe on a : $\Gamma_3^* = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ et $\overline{\Gamma}_3^* = \{3, 2, 1, 4\}$

La classe d'équivalence de 3 est : $\mathcal{C}_3 = \Gamma_3^* \cap \overline{\Gamma}_3^* = \{3, 4\}$

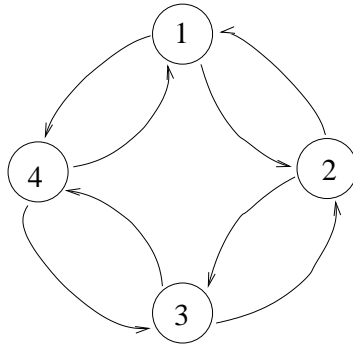
Le graphe des classes est le graphe suivant :



Ce graphe est **acircuitique**.

10.4 Chaînes irréductibles

Soit le graphe suivant :



Partant du sommet 1, on y revient en un nombre pair de transitions. La chaîne est dite 2-périodique. La matrice des transitions P est donc de la

forme : $P =$

	×		×
×		×	
	×		×
×		×	

En renumérotant les sommets, on obtient une matrice de la forme :

$$\tilde{P} =$$

		×	×
		×	×
×	×		
×	×		

On obtient donc : $\tilde{P}^2 = \begin{pmatrix} A & (0) \\ (0) & B \end{pmatrix}$

On a la propriété suivante :

La période de la chaîne est le **pgcd** des longueurs des différents chemins du graphe

Remarque S'il existe une boucle sur un sommet, la chaîne est *apériodique*.

10.5 Distribution pour une chaîne irréductible apériodique

On cherche à calculer les deux limites suivantes (avec les notations précédentes) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q(n) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P^n$$

Propriété 4 *S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow P^n > 0$*

(i.e. tous les éléments de P sont strictement positifs)

Alors la chaîne est **irréductible** et **apériodique**.

Propriété 5 *Si la chaîne est irréductible et apériodique régulière, alors il existe une unique distribution, soit Π , de probabilité telle que :*

1. $\forall i, \Pi_i > 0$ et $\sum_{i=1}^n \Pi_i = 1$
2. ${}^t\Pi = {}^t\Pi.P$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \pi$ où $\pi = ({}^t\Pi)_i$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} p_j(n) = \Pi_j$

Interprétation de la distribution stationnaire

- Π est la distribution de la loi de $(\lim_{\infty} X_n = X_{\infty}) : P(X_{\infty} = i) = \Pi_i$
- Π_i est la proportion de temps que le système passe dans l'état i .
- $\mu_i = \Pi_i^{-1}$ est le temps moyen pour, partant de l'état i , revenir sur l'état i .

10.6 Chaînes de Markov avec revenus

Ayant une chaîne de Markov régulière, on associe à chaque transition un gain (coût) que l'on note $r_{i,j}$.

On note $a = (a_i)_{i \in [1,n]}$ le vecteur de l'espérance des coûts en une transition, partant de l'état i . On a donc : $\forall i \in [1, n], a_i = \sum_{j=1}^n p_{i,j} \cdot r_{i,j}$

On note $v_i^{(n)}$ l'espérance des coûts en n transitions en partant de l'état i .
Ainsi : $\begin{cases} v^{(1)} = a \\ v^{(0)} = 0 \end{cases}$ (c'est une convention)

Propriété 6 On a la propriété : $\forall m \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} v^{(m)} = a + P.v^{(m-1)} \\ v^{(m)} = v^{(m-1)} + P^{m-1}.a \end{cases}$

Formule asymptotique pour $v^{(m)}$

$$v^{(m)} = m.g.e + v + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m}\right)$$

avec e le vecteur identité, $g = {}^t\pi.a$ (π désignant la distribution stationnaire et a l'espérance du gain en une étape) et v solution du problème :

$$\begin{cases} (I - P).v = a - g.e \\ {}^t\pi.v = 0 \end{cases}$$

Exemple 1 : Confectionneur

Les bonnes années, le confectionneur fait un bénéfice de 10, alors que les mauvaises, son bénéfice est nul.

On suppose que la matrice P est la suivante : $P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$

On obtient l'espérance des coûts suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -10 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow a = \begin{pmatrix} 0,7 \times 0 + 0,3 \times 0 = 0 \\ 0,5 \times (-10) + 0,5 \times (-10) = -10 \end{pmatrix}$$

On obtient le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6
v_1^n	0	-3	-6,6	-10,32	-14,064	-17,813
v_2^n	-10	-15	-19	-22,8	-26,56	-30,312
$v_1^n - v_2^n$	10	12	12,4	12,48	12,496	12,499
$v_1^n - v_1^{n-1}$	0	-3	-3,6	-3,72	-3,744	-3,749
$v_2^n - v_2^{n-1}$	-10	-5	-4	-3,8	-3,76	-3,752

On trouve, avec les notations précédemment introduite : $\Pi = \frac{1}{8}.(5, 3)$, $a = (0, -10)$

et $g = {}^t\Pi.a = -\frac{30}{8} = -3,75$

La résolution dus système donnant v aboutit au résultat suivant :

$$v = (4.6875 , -7,8125) \Rightarrow v_1 - v_2 = 12,5$$

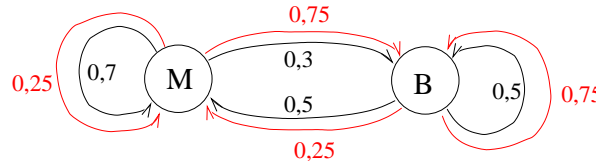
Ces résultats sont compatibles avec ceux que l'on peut lire dans le tableau.

Exemple 2 : Confectionneur

Désormais, le confectionneur à le choix entre changer ou non ses confections à la fin de l'année. Lorsqu'il décide de changer, cela lui coûte 5 et les probabilités de transitions varient. On a alors : $P = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$

On en déduit que : $C = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$

Le graphe des transitions est alors le suivant :



On cherche la stratégie stationnaire, c'est à dire celle qui, sur un état, prend toujours la même décision, quelle que soit la date, et qui minimise le coût asymptotique moyen : g .

On a 4 stratégies stationnaires différentes (2 sur M et 2 sur B). On a donc 4 chaînes de Markov à étudier. Supposons avoir 10 états différents et que l'on ait 4 choix sur chaque état. On a donc : 4^{10} études à faire !

Pour le confectionneur, les stratégies sont : (1,1) , (1,2) , (2,1) et (2,2).

Étudions la stratégie (2,1). Elle correspond à la chaîne de Markov suivante : $P = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$

10.7 Recours à la programmation linéaire

On probabilise le choix des décisions :

$$y_{j,d} = P(\text{choisir la décision } d \mid \text{on est dans l'état } j)$$

$$x_{j,d} = P([\text{choisir la décision } d] \text{ et } [\text{on est dans l'état } j])$$

Les $x_{j,d}$ sont les probabilités limites de la chaîne de Markov :

$$x_{j,d} = \Gamma(AB) = P(A|B) \times P(B) = P(\text{choisir } d \mid \text{on est en } j) \times P(\text{on est en } j)$$

Donc : $\boxed{x_{j,d} = y_{j,d} \times \Pi_j}$

D'autre part, on a : $\Pi_j = \sum_{d=1}^{D_j} x_{j,d}$, avec $D_j = \mathbf{Card} \{d/\text{on est en } j\}$

Soit donc : $y_{j,d} = \frac{x_{j,d}}{\Pi_j} = x_{j,d} \times \left(\sum_{d=1}^{D_j} x_{j,d} \right)^{-1}$

Pour l'espérance du coût à 1 transition, on a : $g = \sum_{j=1}^N \sum_{d=1}^{D_j} x_{j,d} \cdot a_{j,d}$

En traduisant sur les $y_{j,d}$ les contraintes sur Π , on obtient un problème de type **SIMPLEXE** :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall j, \Pi_j > 0 \Rightarrow x_{j,d} \geq 0 \\ \sum_{j=1}^N \Pi_j = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^N \sum_{d=1}^{D_j} x_{j,d} = 1 \\ {}^t \pi = {}^t \Pi \cdot P \Rightarrow \sum_{d=1}^{D_j} x_{j,d} = \sum_{j=1}^N \sum_{d=1}^{D_j} x_{j,d} \cdot p_{i,j}^{(d)} \end{array} \right.$$

où $p_{j,d}^{(d)}$ désigne la probabilité de transition de i à j en prenant la décision d .

Remarque

- Il y a $N + 1$ contraintes. Cependant, il ne peut y en avoir que N d'indépendantes : une base possédera donc N composantes.
- On obtient les $x_{j,d}$ dans \mathbb{R} .

On revient aux $y_{j,d}$ par la formule : $y_{j,d} = \frac{x_{j,d}}{\Pi_j} = x_{j,d} \times \left(\sum_{d=1}^{D_j} x_{j,d} \right)^{-1}$

On vérifie (ce qui se démontre facilement) que :

$$\boxed{y_{j,d} \in \{0, 1\}}$$

Retour à l'exemple précédent

On suppose $M=1$ et $B=2$. On a alors :

- $x_{i,j} \geq 0$

- On a l'équivalence suivante : $\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 x_{i,j} = 1 \Leftrightarrow x_{1,1} + x_{1,2} + x_{2,1} + x_{2,2} = 1$

- $0,3.x_{1,1} + 0,75.x_{1,2} - 0,5.x_{2,1} - 0,25.x_{2,2} = 0$

- $Z_{min} = 5.x_{1,2} - 10.x_{2,2} - 5.x_{2,2}$

On en déduit : $x_{1,2} = \frac{2}{5}$, $x_{2,1} = \frac{3}{5}$, $x_{1,1} = x_{2,2} = 0$ et $Z_{min} = 5$

D'où : $y_{1,2} = \frac{x_{1,2}}{x_{1,1} + x_{1,2}} = 1$ $y_{2,1} = \frac{x_{2,1}}{x_{2,1} + x_{2,2}} = 1$ $y_{1,1} = y_{2,2} = 0$