

Recherche Opérationnelle
TD 3 - Recherche d'un flot maximum
CORRECTION

1 Rappel de cour :

1.1 Algorithme de *Ford-Fulkerson*

Cet algorithme nécessite de choisir une solution de flot initiale quelconque (quoique meilleur la solution initiale est, plus rapide sera l'algo).

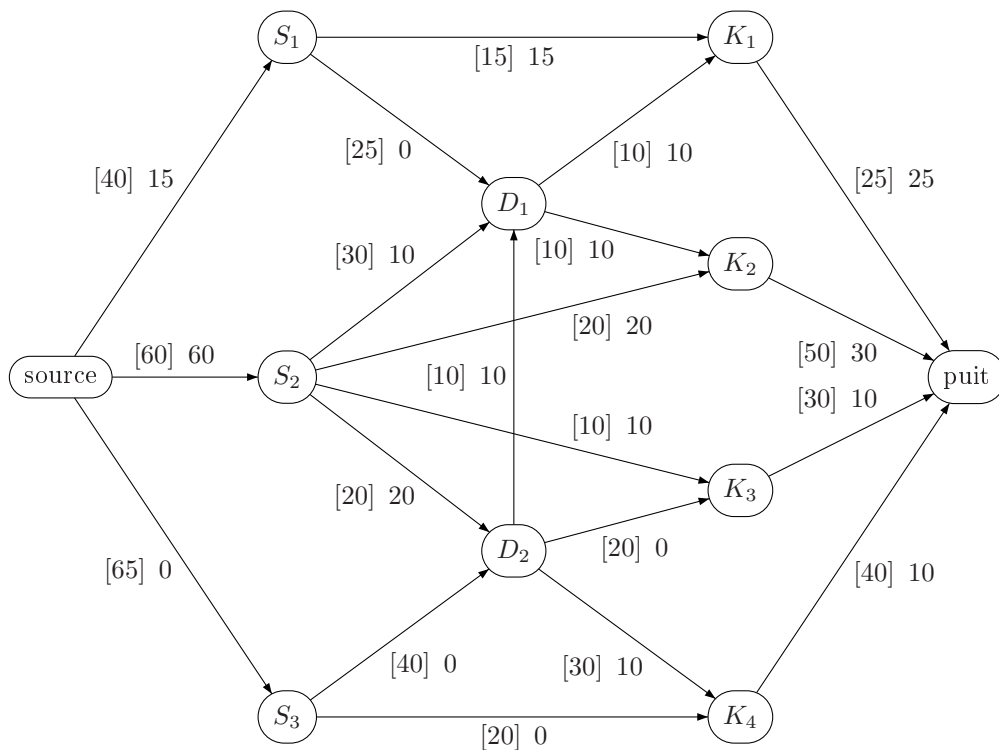
1. Itérations successive pour marquer les sommets :
 - (a) le sommet source est marqué (par exemple d'un +).
 - (b) pour chacun des sommets marqué, on marque certains de ses successeurs et certains de ses antécédents de la façon suivante :
 - s'ils ont déjà été marqués précédemment, on ne les examine pas.
 - pour les successeurs : Si le flux n'est pas maximal, on regarde de combien il est possible de l'augmenter en mémorisant le chemin depuis s qui permet d'accéder à ce noeud. Si le flux est maximal, on ne peut pas l'augmenter, le successeur n'est pas marqué.
 - Pour les antécédents : si le flux venant au sommet examiné vers le sommet en cour est positif, on regarde de combien il est possible de le diminuer en mémorisant encore une fois le chemin qui permet d'accéder à ce noeud depuis la source. si le flux venant du noeud examiné est nul, il ne peut être diminué et le sommet n'est pas marqué.
 - (c) Pendant le processus de marquage, si le puit P est atteint, alors il existe une chaîne améliorante entre S et P . On prend la valeur minimale en valeur absolue entre les différentes augmentations et diminutions des flux et on ajoute (diminue) sur les arcs de la chaîne améliorante cette valeur.

Si le puit P n'est pas marqué pendant la procédure de marquage, il n'existe pas de chaîne améliorante et la valeur du flux maximal est donné par la valeur de la coupe obtenue (ensemble des sommets marqués - ensemble des sommets non marqués).
2. On réitère en prenant comme flot initial le flot obtenu précédemment.

2 Exo 1

en créant un noeud *source* alimentant S_1, S_2, S_3 et un noeud *puit* recevant les flots venant des villes K_1, K_2, K_3, K_4 , on voit que le débit partant de S est 165 alors que le débit entrant dans P est de 145. Le but est donc de trouver le flot maximal et de vérifier si sa valeur est bien 145. (la capacité maximale des liens entrant dans K_2 est de 30, on sait déjà que la réponse sera non)

Soit le graphe suivant avec un flot initial :



On utilise l'algorithme permettant de trouver une chaîne améliorante :

– Première étape :

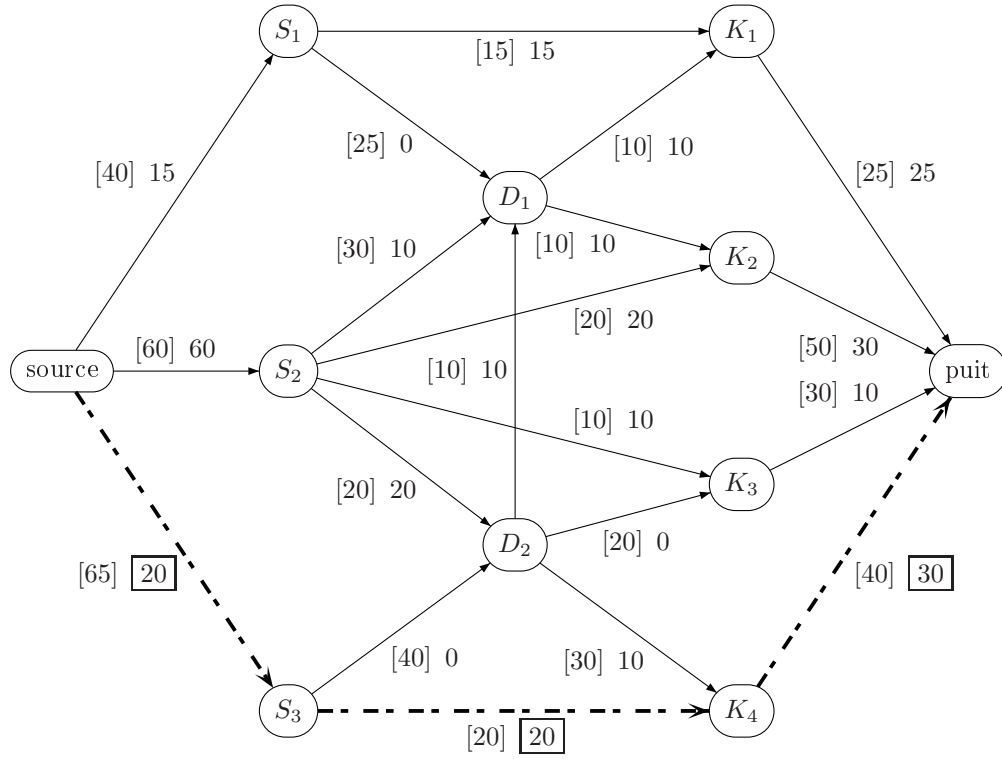
sommets	S	S_1	S_3	D_1	D_2	K_4	S_2	K_3	P
marque	-	S	S	S_1	S_3	S_3	D_1	D_2	K_4
gain	-	+25	+65	+25	+40	+20	-10	+20	+30

On a donc une chaîne améliorante :

$$S \xrightarrow{+65} S_3 \xrightarrow{+20} K_4 \xrightarrow{+30} P$$

avec $\mu^+ = \{65, 20, 30\}$ et $\mu^- = \{\}$ d'où $\boxed{\epsilon(\mu) = 20}$.

on obtient alors le flot suivant :



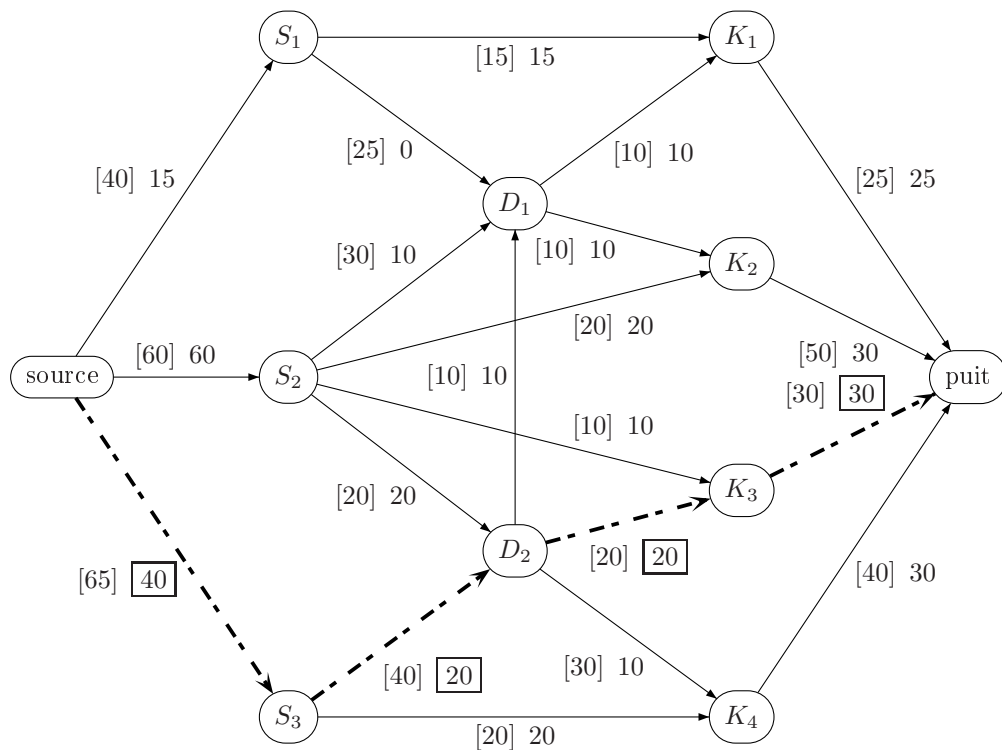
– deuxième étape :

sommets	S	S_1	S_3	D_1	D_2	S_2	K_3	K_4	P
marque	-	S	S	S_1	S_3	D_1	D_2	D_2	K_3
gain	-	+25	+45	+25	+40	-10	+20	+20	+20

On a donc une chaîne améliorante :

$$S \xrightarrow{+45} S_3 \xrightarrow{+40} D_2 \xrightarrow{+20} K_3 \xrightarrow{+20} P$$

avec $\mu^+ = \{45, 40, 20, 20\}$ et $\mu^- = \{\}$ d'où $\epsilon(\mu) = 20$.
on obtient alors le flot suivant :



– troisième étape :

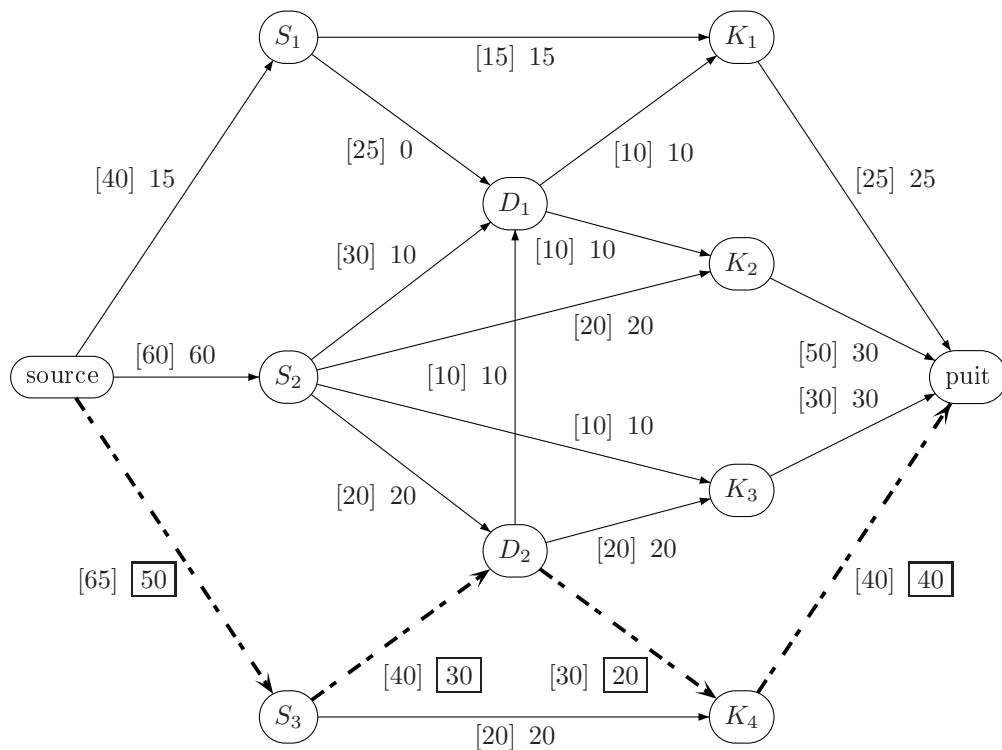
sommets	S	S_1	S_3	D_1	D_2	S_2	K_4	P
marque	-	S	S	S_1	S_3	D_1	D_2	K_4
gain	-	+25	+20	+25	+20	-10	+20	+10

On a donc une chaîne améliorante :

$$S \xrightarrow{+25} S_3 \xrightarrow{+20} D_2 \xrightarrow{+20} K_4 \xrightarrow{+10} P$$

avec $\mu^+ = \{25, 20, 20, 20\}$ et $\mu^- = \{\}$ d'où $\boxed{\epsilon(\mu) = 10}$.

on obtient alors le flot suivant :



– quatrième étape :

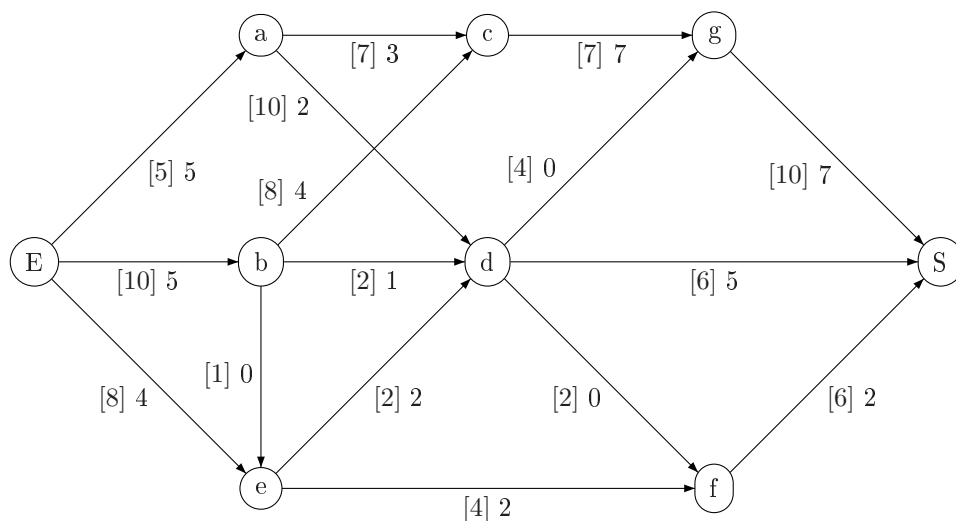
sommets	S	S_1	S_3	D_1	D_2	S_2	K_4
marque	-	S	S	S_1	S_3	D_1	D_2
gain	-	+25	+15	+25	+10	-10	+10

Le puits P n'est pas marqué, il n'y a donc plus de chaîne améliorante, le flux maximal est donc de 125. SEULE LA VILLE K_2 n'est pas fournie a hauteur de sa demande.

3 Capacité d'un réseau routier

3.1 1ère étude

On prend comme flot initial, le flot suivant :



le tableau de marquage des sommets donne :

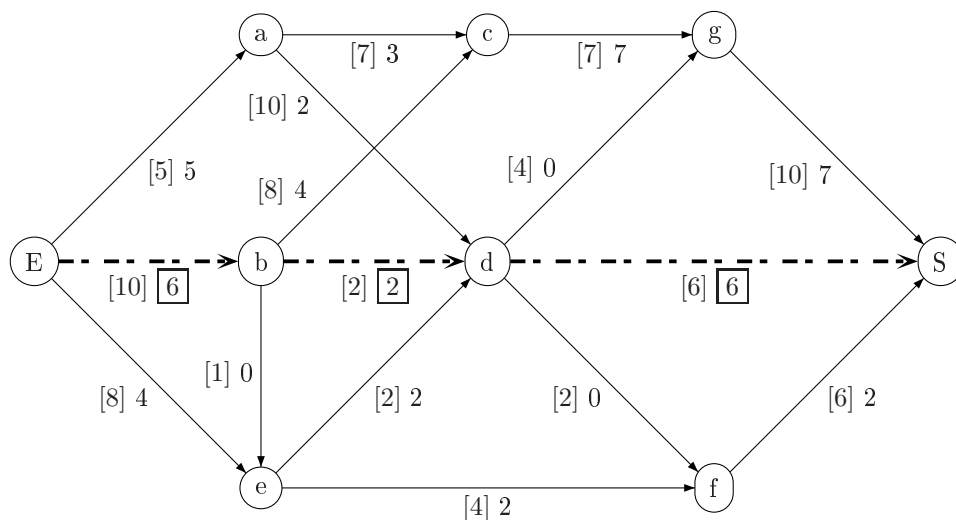
sommet	E	b	e	c	d	a	g	S
marque	-	E	E	b	b	c	d	d
gain	-	+5	+4	+4	+1	-3	+4	+1

On a donc la chaîne améliorante suivante :

$$E \xrightarrow{+5} b \xrightarrow{+1} d \xrightarrow{+1} S$$

avec $\mu^+ = \{5, 1, 1\}$ et $\mu^- = \{\}$ d'où $\epsilon(\mu) = 1$.

on obtient alors le flot suivant :



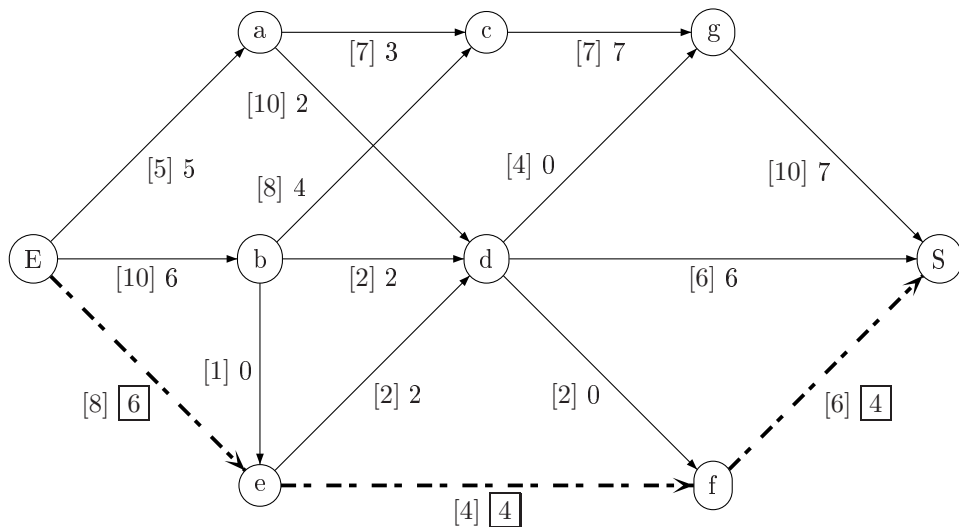
le tableau de marquage des sommets donne :

sommet	E	b	e	c	f	a	S
marque	-	E	E	b	e	c	f
gain	-	+4	+4	+4	+2	-3	+4

On a donc la chaîne améliorante suivante :

$$E \xrightarrow{+4} e \xrightarrow{+2} f \xrightarrow{+4} S$$

avec $\mu^+ = \{4, 2, 4\}$ et $\mu^- = \{\}$ d'où $\epsilon(\mu) = 2$.
on obtient alors le flot suivant :



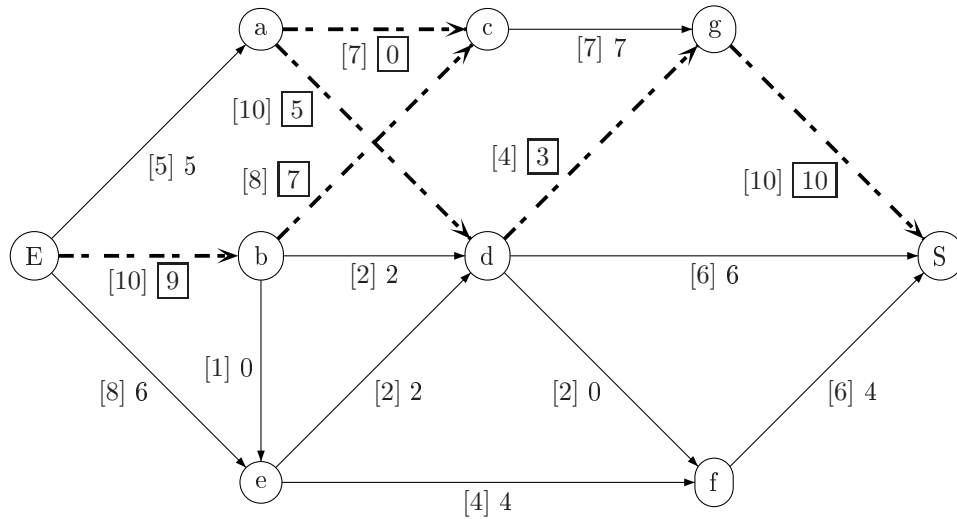
le tableau de marquage des sommets donne :

sommet	E	b	e	c	a	d	g	f	S
marque	-	E	E	b	c	a	d	d	g
gain	-	+4	+2	+4	-3	+8	+4	+2	+3

On a donc la chaîne améliorante suivante :

$$E \xrightarrow{+4} b \xrightarrow{+4} c \xrightarrow{-3} a \xrightarrow{+8} d \xrightarrow{+4} g \xrightarrow{+3} S$$

avec $\mu^+ = \{4, 4, 3, 8, 4, 3\}$ et $\mu^- = \{\}$ d'où $\epsilon(\mu) = 3$.
on obtient alors le flot suivant :



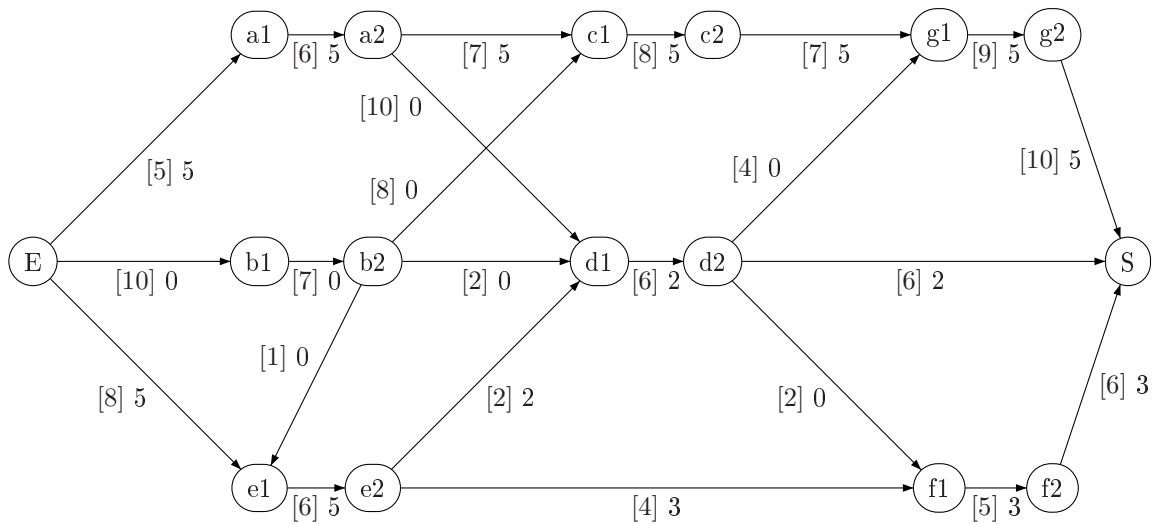
le tableau de marquage des sommets donne :

sommet	E	b	e	c
marque	-	E	E	b
gain	-	+1	+2	+1

Le sommet S ne peut être marqué, le flot maximal est obtenu et a pour valeur 20.

3.2 2^{de} étude

On "éclate" chaque ville $a, \dots, g$ en deux sommets pour représenter les débits de réseau urbain. On transforme ainsi le graphe et on prend comme nouveau flot initial le flot suivant :



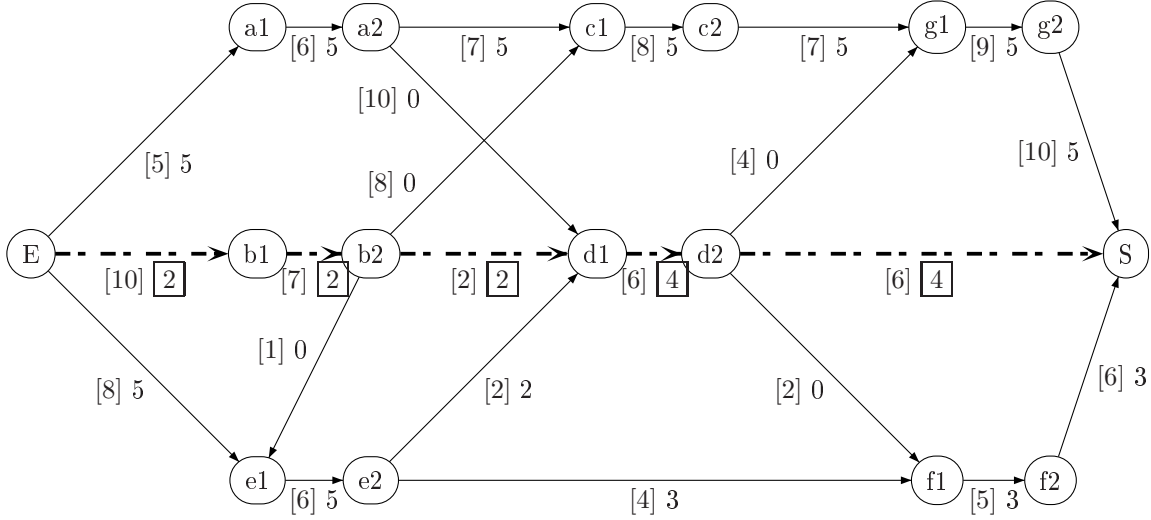
le tableau de marquage des sommets donne :

sommet	E	b1	e1	b2	e2	c1	d1	f1	c2	a2	d2	f2	g1	a1	S
marque	-	E	E	b1	e1	b2	b2	e2	c1	c1	d1	f1	c2	a2	d2
gain	-	+10	+3	+7	+1	+8	+2	+1	+3	-2	+4	+2	+2	-5	+4

On a donc la chaîne améliorante suivante :

$$E \xrightarrow{+10} b1 \xrightarrow{+7} b2 \xrightarrow{+2} d1 \xrightarrow{+4} d2 \xrightarrow{+4} S$$

avec $\mu^+ = \{10, 7, 2, 4, 4\}$ et $\mu^- = \{\}$ d'où $\epsilon(\mu) = 2$.
on obtient alors le flot suivant :



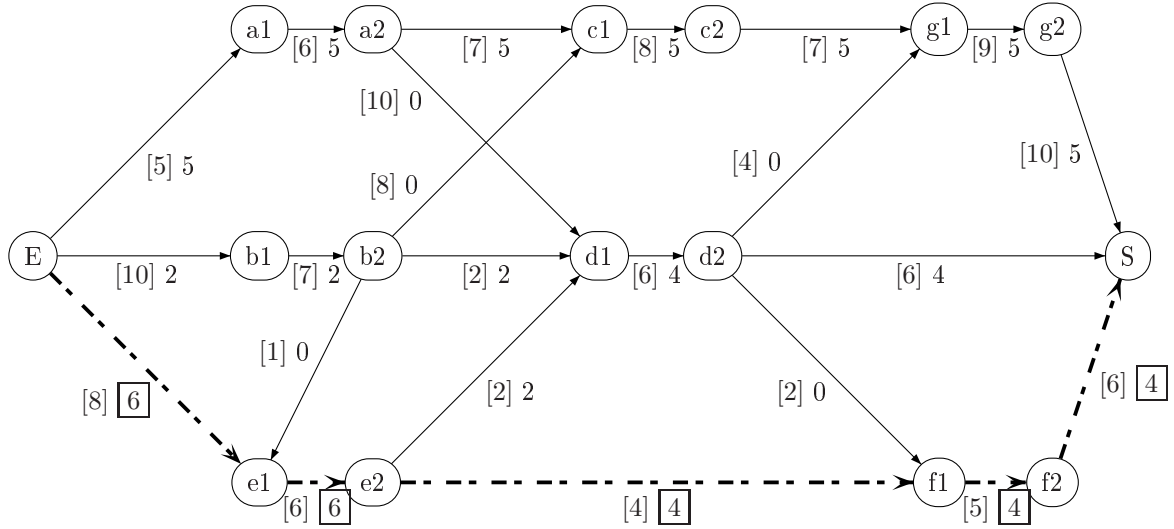
le tableau de marquage des sommets donne :

sommet	E	b1	e1	b2	e2	c1	f1	c2	a2	f2	g1	d1	a1	S
marque	-	E	E	b1	e1	b2	e2	c1	c1	f1	c1	a2	a2	f2
gain	-	+8	+3	+5	+1	+8	+1	+3	-5	+2	+2	+10	-5	+3

On a donc la chaîne améliorante suivante :

$$E \xrightarrow{+3} e1 \xrightarrow{+1} e2 \xrightarrow{+1} f1 \xrightarrow{+2} f2 \xrightarrow{+3} S$$

avec $\mu^+ = \{3, 1, 1, 2, 3\}$ et $\mu^- = \{\}$ d'où $\epsilon(\mu) = 1$.
on obtient alors le flot suivant :



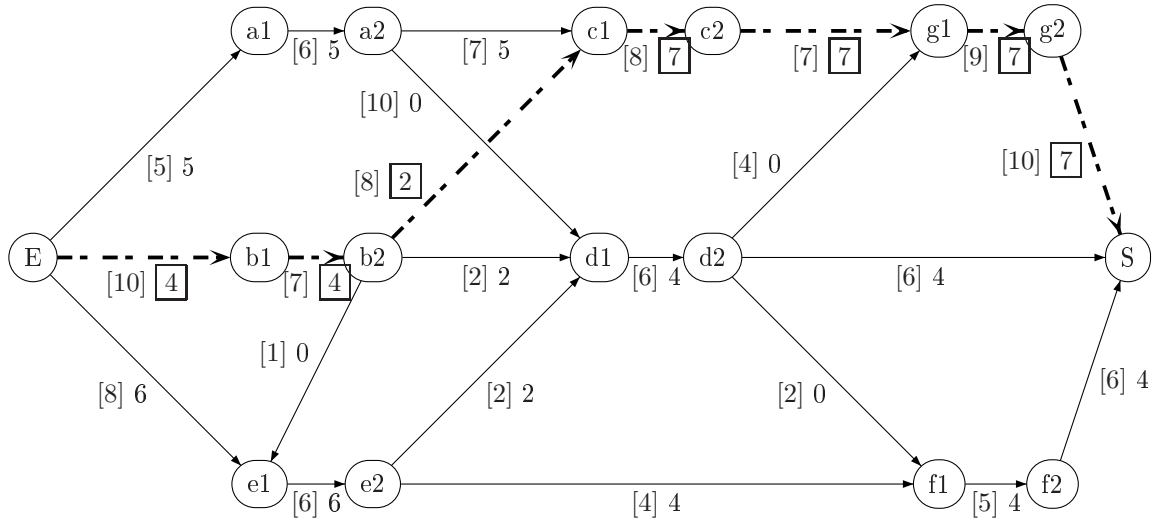
le tableau de marquage des sommets donne :

sommet	E	b1	e1	b2	c1	c2	a2	g1	a1	d1	g2	d2	e2	S
sommet	-	E	E	b1	b2	c1	c1	c2	a2	a2	g1	d1	d1	g2
sommet	-	+8	+2	+5	+8	+3	-5	+2	-5	+10	+4	+2	-2	+5

On a donc la chaîne améliorante suivante :

$$E \xrightarrow{+8} b1 \xrightarrow{+5} b2 \xrightarrow{+8} c1 \xrightarrow{+3} c2 \xrightarrow{+2} g1 \xrightarrow{+4} g2 \xrightarrow{+5} S$$

avec $\mu^+ = \{8, 5, 8, 3, 2, 4, 5\}$ et $\mu^- = \{\}$ d'où $\epsilon(\mu) = 2$.
on obtient alors le flot suivant :



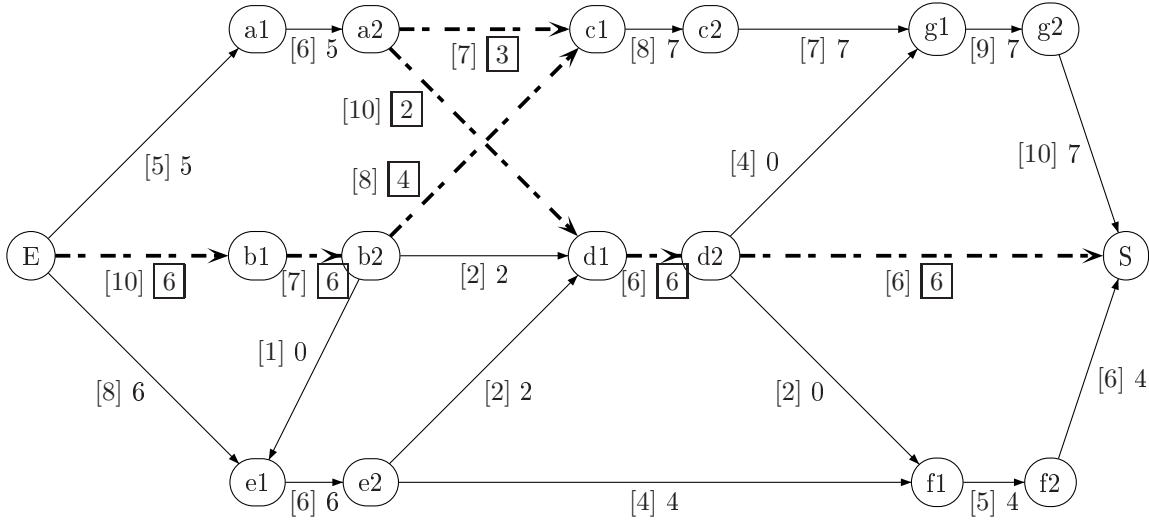
le tableau de marquage des sommets donne :

sommet	b1	e1	b2	c1	c2	a2	b2	a1	d1	d2	e2	g1	S
marque	E	E	b1	b2	c1	c1	c1	a2	a2	d1	d1	d2	d2
gain	+6	+2	+3	+6	+1	-5	-2	-1	+10	+2	-2	+4	+2

On a donc la chaîne améliorante suivante :

$$E \xrightarrow{+6} b1 \xrightarrow{+3} b2 \xrightarrow{+6} c1 \xrightarrow{-5} a2 \xrightarrow{+10} d1 \xrightarrow{+2} d2 \xrightarrow{+2} S$$

avec $\mu^+ = \{6, 3, 6, 5, 10, 2, 2\}$ et $\mu^- = \{\}$ d'ou $\epsilon(\mu) = 2$.
on obtient alors le flot suivant :



le tableau de marquage des sommets donne :

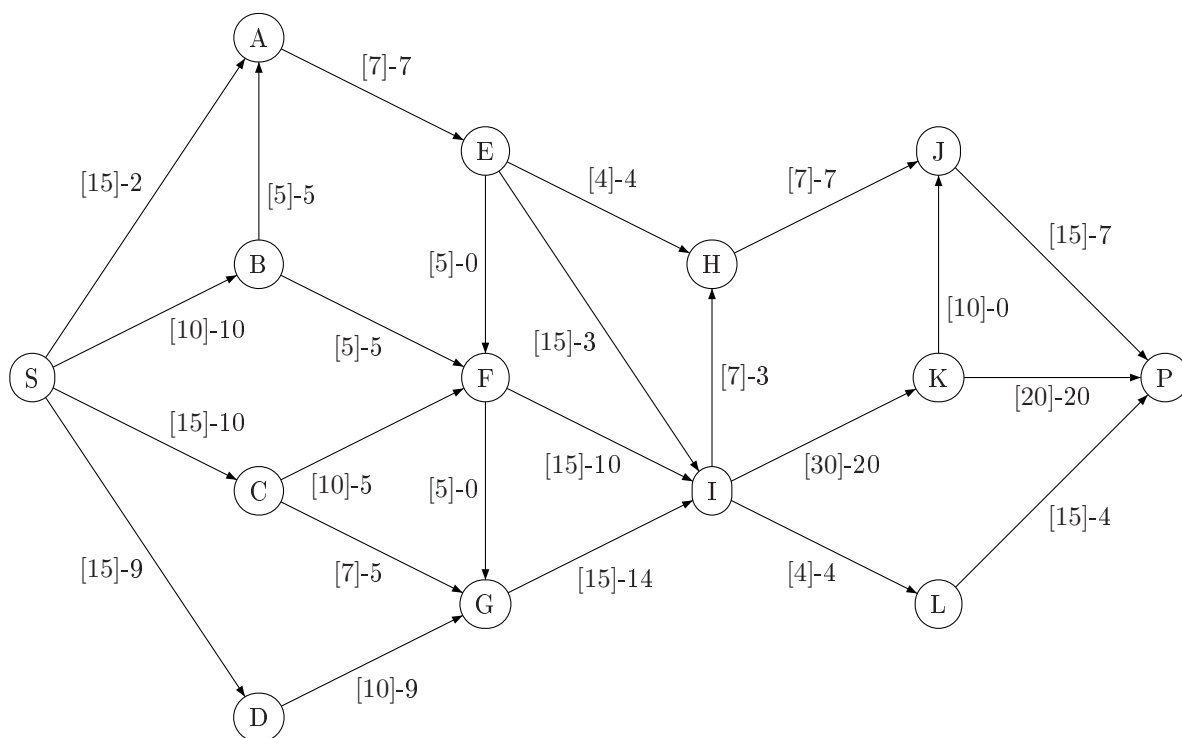
sommet	b1	e1	b2	c1	c2	a2	d1	a1	e2
sommet	E	E	b1	b2	c1	c1	a2	a2	d1
sommet	+4	+2	+1	+4	+1	-3	+8	-1	-2

Le sommet S ne pouvant être marqué, le flot maximal a été trouvé, sa valeur étant : 17

4 Adduction d'eau

4.1 flot max actuel

On ajoute un sommet S relié aux sommets A, B, C, D avec comme débits respectifs les débits max associés aux quatres réserves on ajoute également un sommet puit et enfin On prend comme flot initial le flot suivant :



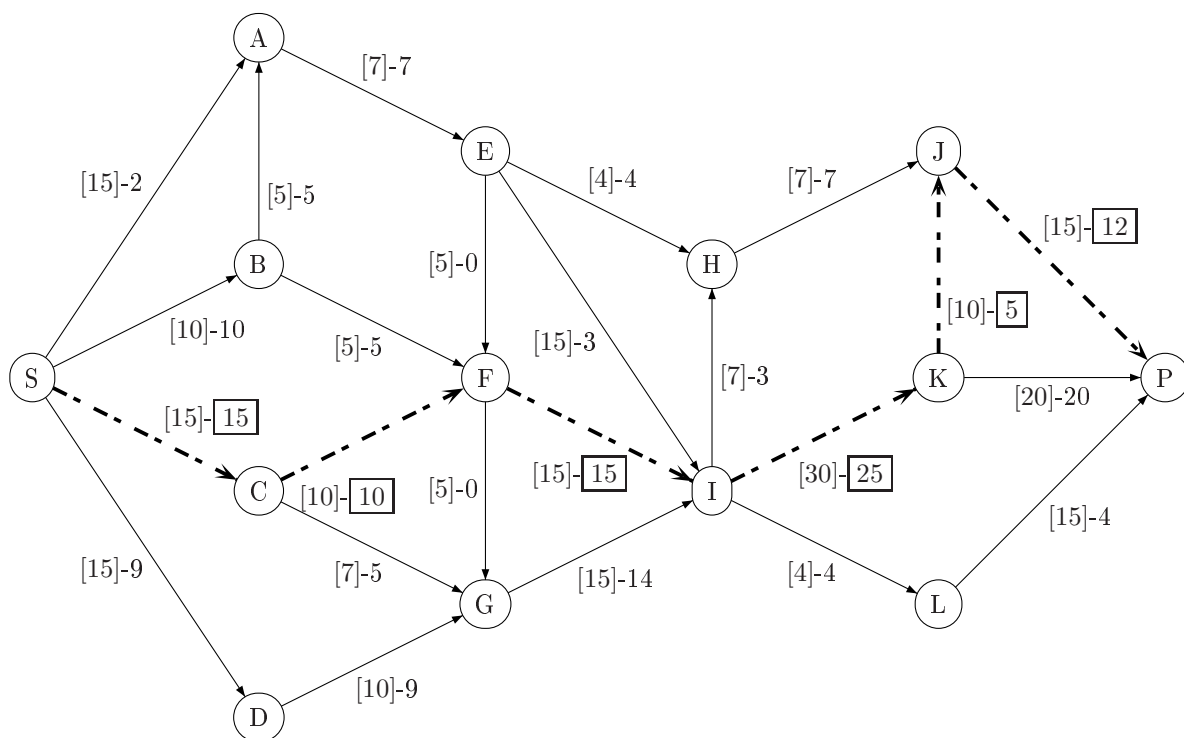
Le marquage des sommets donne :
le tableau de marquage des sommets donne :

sommet	S	A	C	D	B	F	G	I	H	K	E	J	P
marque	-	S	S	S	A	C	C	F	I	I	I	K	J
gain	-	+13	+5	+6	-5	+5	+2	+5	+4	+10	-3	+10	+8

On a donc la chaîne améliorante suivante :

$$S \xrightarrow{+5} C \xrightarrow{+5} F \xrightarrow{+5} I \xrightarrow{+10} K \xrightarrow{+10} J \xrightarrow{+8} P$$

avec $\mu^+ = \{5, 5, 5, 10, 10, 8\}$ et $\mu^- = \{\}$ d'où $\epsilon(\mu) = 5$.
on obtient alors le flot suivant :



Le marquage des sommets donne :

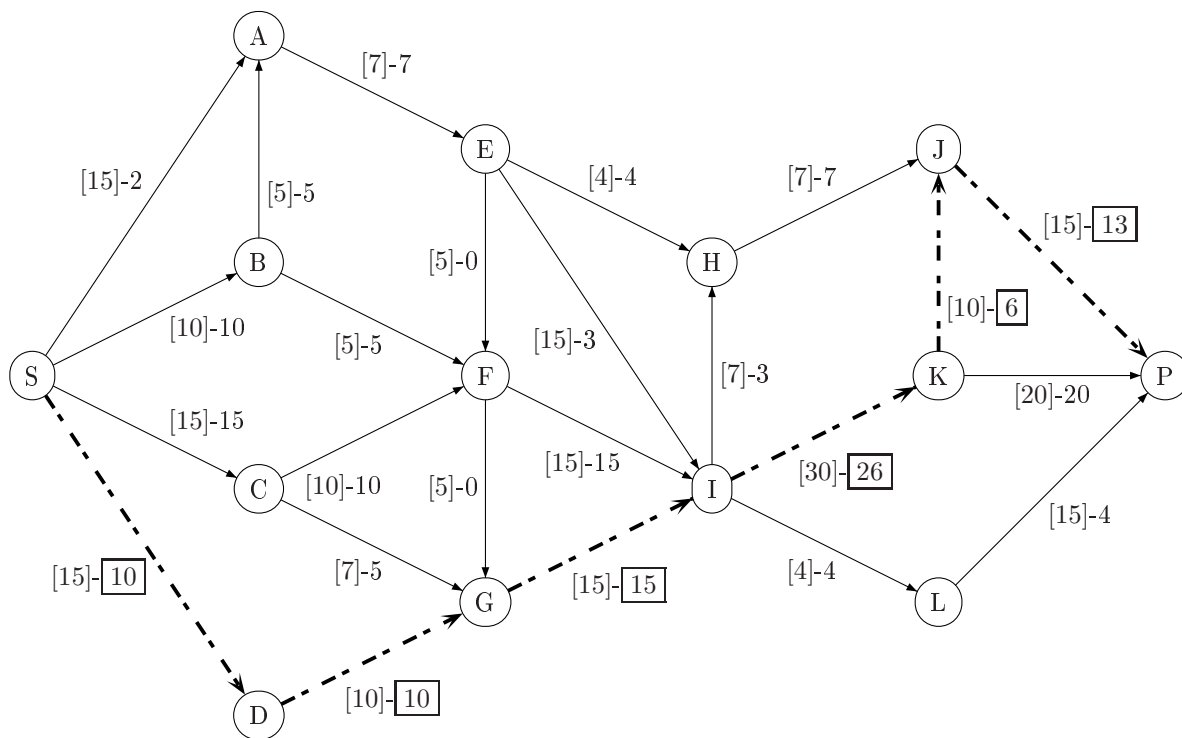
sommet	S	A	D	B	G	I	C	H	K	E	F	J	P
marque	-	S	S	A	D	G	G	I	I	I	I	K	J
gain	-	+13	+6	-5	+1	+1	-5	+4	+5	-3	-15	+5	+3

On a donc la chaîne améliorante suivante :

$$S \xrightarrow{+6} D \xrightarrow{+1} G \xrightarrow{+1} I \xrightarrow{+5} K \xrightarrow{+5} J \xrightarrow{+3} P$$

avec $\mu^+ = \{6, 1, 1, 5, 5, 3\}$ et $\mu^- = \{\}$ d'où $\epsilon(\mu) = 1$.

on obtient alors le flot suivant :



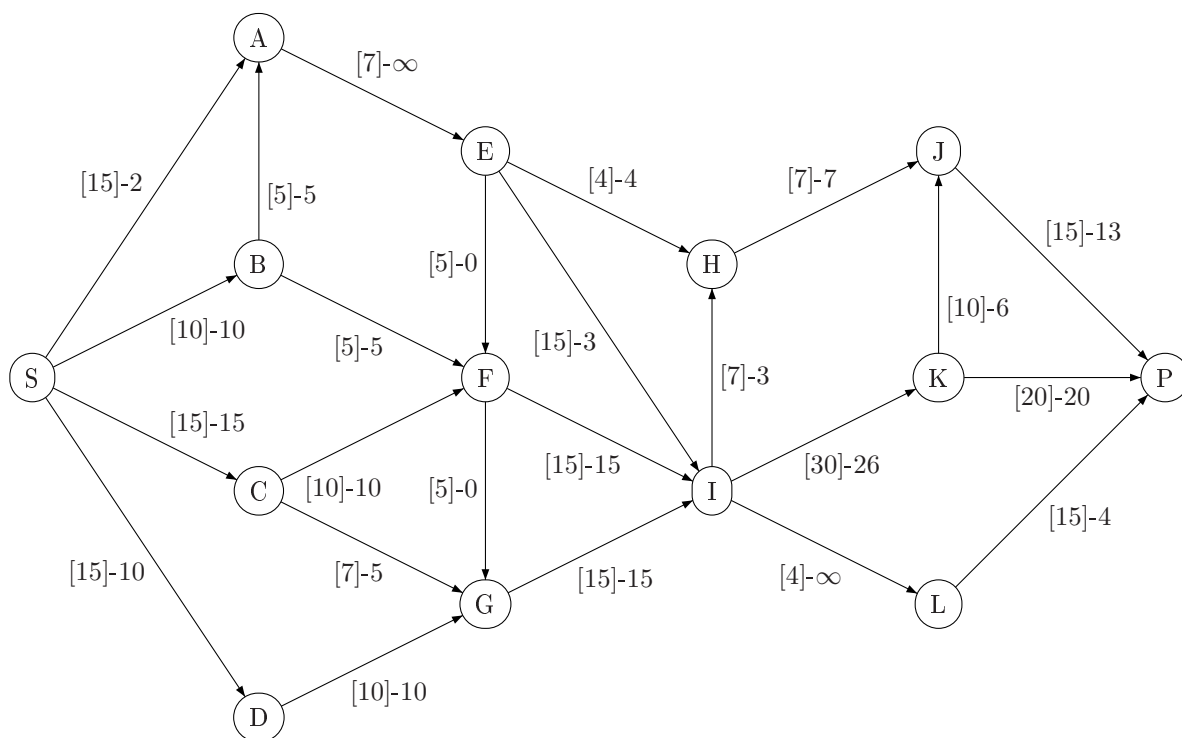
Le marquage des sommets donne :
le tableau de marquage des sommets donne :

sommet	S	A	D	B
marque	-	S	S	A
gain	-	+13	+5	-5

d'où le flot max avec le réseau actuel : $F_{max} = 37$

4.2 Prédiction pour les deux nouveaux débits

On recommence l'algorithme en considérant que les deux canalisations ont des débits infinis (ces deux canalisations ne peuvent plus être sources de blocage). On reprend comme flot initial, le flot max obtenu précédemment :

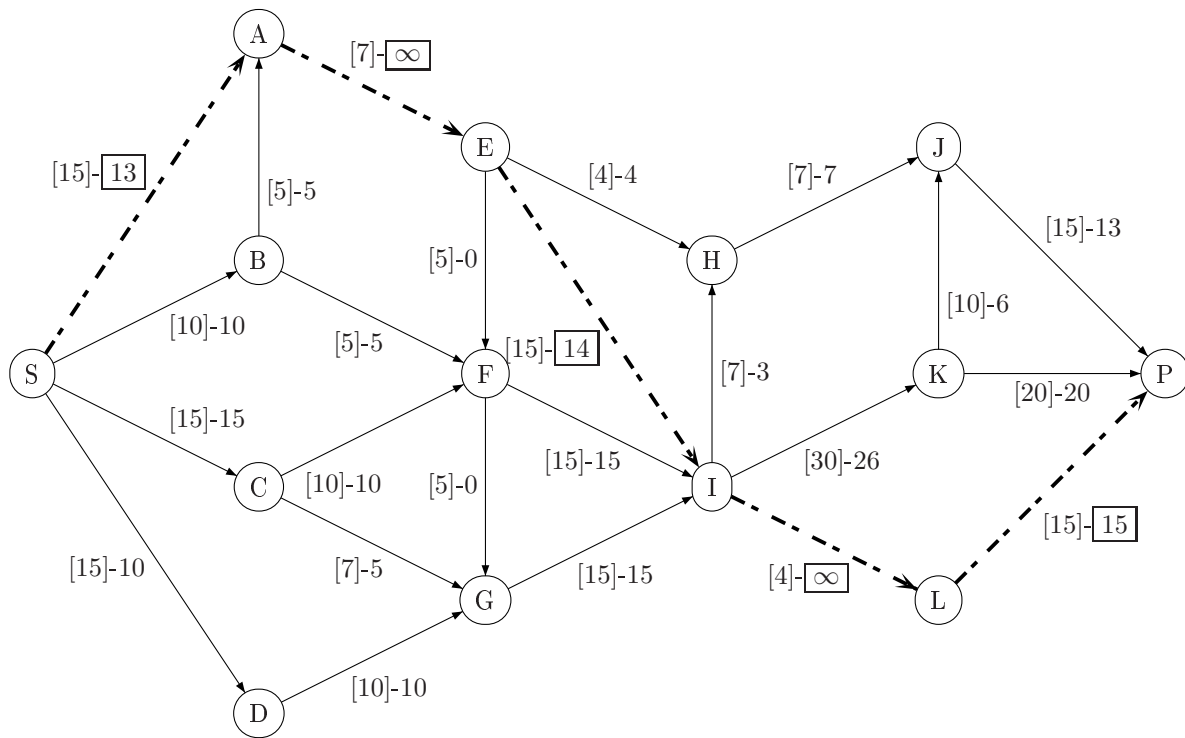


sommet	S	A	D	E	B	I	F	H	K	L	G	C	J	S
marque	-	S	S	A	A	E	E	I	I	I	I	F	K	L
gain	+13	+5	∞	-5	+12	+5	+4	+4	∞	-15	-10	+4	+11	

On a donc la chaîne améliorante suivante :

$$S \xrightarrow{+13} A \xrightarrow{\infty} E \xrightarrow{+12} I \xrightarrow{\infty} L \xrightarrow{+11} S$$

avec $\mu^+ = \{13, \infty, 12, \infty, 11\}$ et $\mu^- = \{\}$ d'où $\boxed{\epsilon(\mu) = 11}$.
on obtient alors le flot suivant :

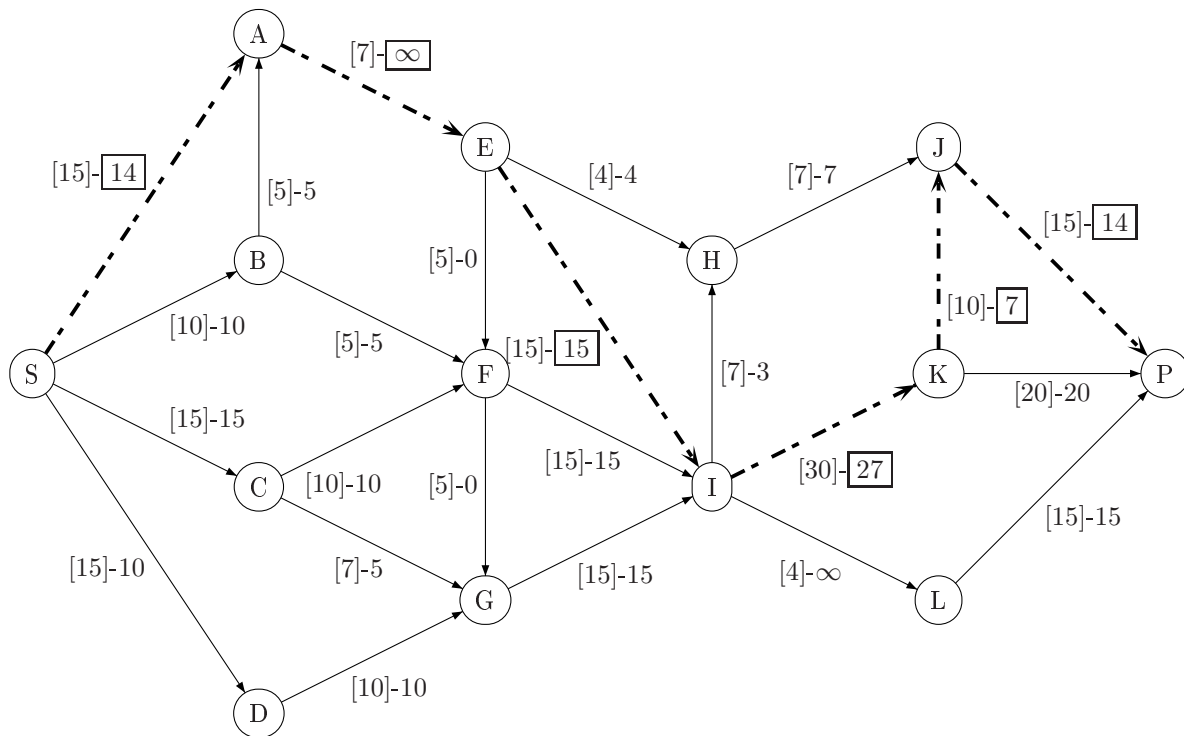


sommet	S	A	D	E	B	I	F	H	K	L	G	C	J	S
marque	-	S	S	A	A	E	E	I	I	I	I	F	K	J
gain	+2	+5	∞	-5	+1	+5	+4	+4	∞	-15	-10	+4	+2	

On a donc la chaîne améliorante suivante :

$$S \xrightarrow{+2} A \xrightarrow{\infty} E \xrightarrow{+1} I \xrightarrow{+4} K \xrightarrow{+4} J \xrightarrow{+2} P$$

avec $\mu^+ = \{2, \infty, 1, 4, 4, 2\}$ et $\mu^- = \{\}$ d'où $\boxed{\epsilon(\mu) = 1}$.
on obtient alors le flot suivant :



sommet	S	A	D	E	B	F	G	C
marque	-	S	S	A	A	E	F	F
gain	-	+1	+5	∞	-5	+5	+5	-10

En considérant des débits infinis, sur les canalisations $A - E$ et $I - L$ le flot maximum est de 49, ce qui correspond aux débits suivants pour chaque canalisations :

$$\begin{aligned} A - E &= 19 \\ I - L &= 15 \end{aligned}$$

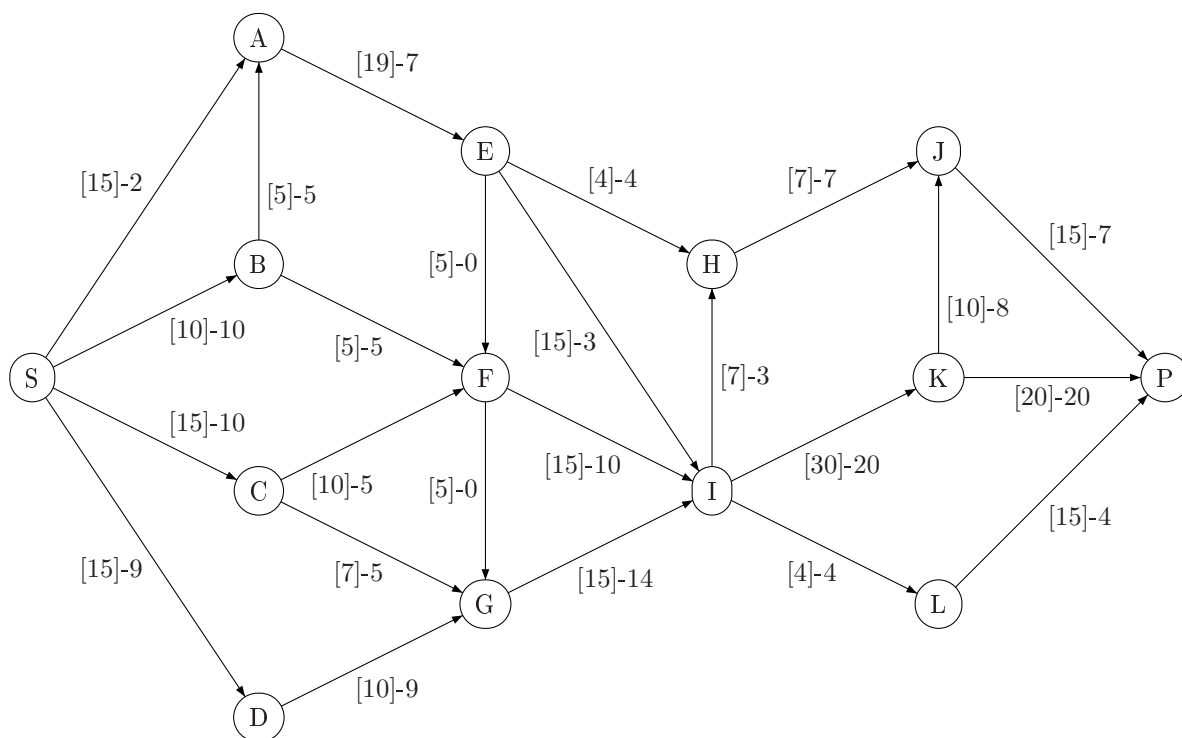
4.3 ordre des travaux

Le mieux est de commencer par le tronçon se trouvant dans la coupe minimale obtenue à la fin de la première question :

$Y = \{S, A, D, B\}$ et $\overline{Y} = \{C, E, F, G, H, I, J, K, L, P\}$
c'est à dire par le tronçon $A - E$.

4.4 flot max après modification du premier tronçon

on reprends comme flot initial le flot max obtenu à la première question :



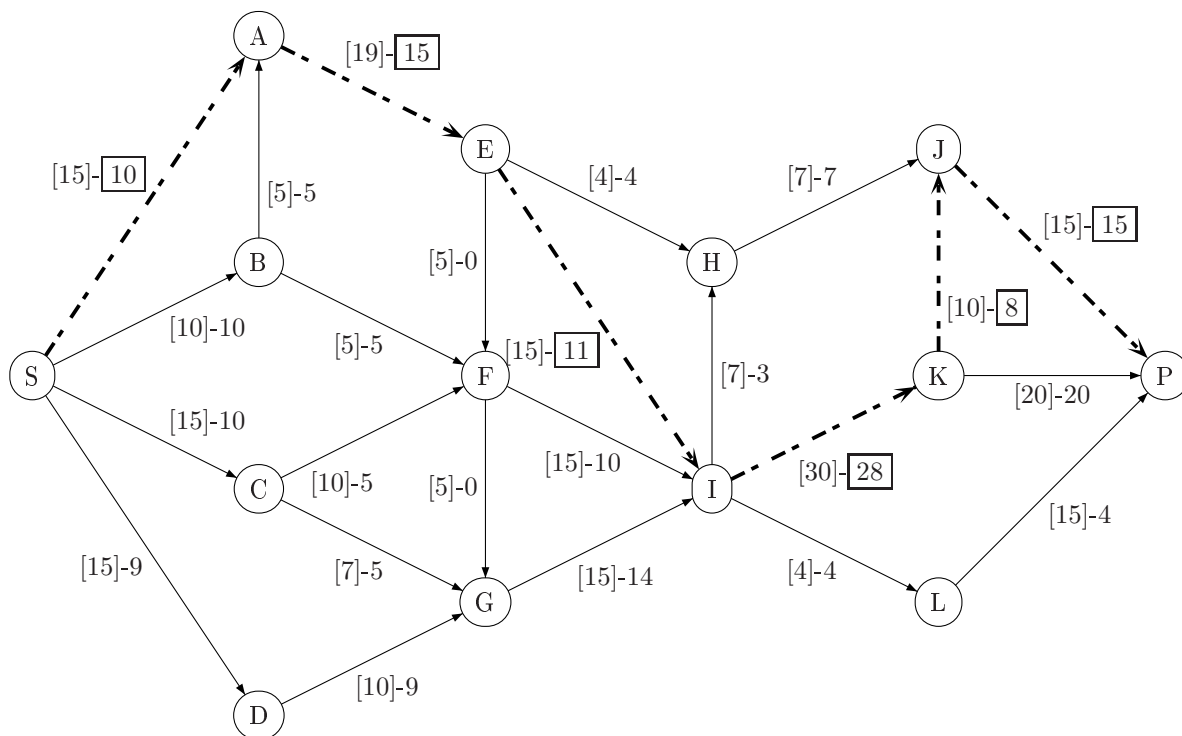
sommet	S	A	C	D	E	B	F	G	I	H	K	J	P
marque	-	S	S	S	A	A	C	C	E	I	I	K	J
gain	+13	+5	+6	+12	-5	+5	+2	+12	+4	+10	+10	+8	

On a donc la chaîne améliorante suivante :

$$S \xrightarrow{+13} A \xrightarrow{+12} E \xrightarrow{+12} I \xrightarrow{+10} K \xrightarrow{+10} J \xrightarrow{+8} P$$

avec $\mu^+ = \{13, 12, 12, 10, 10, 8\}$ et $\mu^- = \{\}$ d'ou $\boxed{\epsilon(\mu) = 8}$.

on obtient alors le flot suivant :



sommet	S	A	C	D	E	B	F	G	I	H	K	J
marque	-	S	S	S	A	A	C	C	E	I	I	K
gain	+5	+5	+6	+4	-5	+5	+2	+4	+4	+2	+2	

le flot max après la première tranche de travaux est de 39

5 L'autoroute des vacances

5.1 traçé économique

Lechoix du traçé le plus économique consiste à trouver le chemin le plus court.

En utilisant l'algorithme de *Disjkstra* :

– étape 1 : $M = \{b, c, d, e, f, g, h, i\}$

d :	0	6	9	-	-	-	-	-	-
	a	b	c	d	e	f	g	h	i

p :	a	a	a	-	-	-	-	-	-
	a	b	c	d	e	f	g	h	i

– étape 2 : $M = \{c, d, e, f, g, h, i\}$

d :	0	6	9	18	12	-	-	-	-
	a	b	c	d	e	f	g	h	i

p :	a	a	a	b	b	-	-	-	-
	a	b	c	d	e	f	g	h	i

– étape 3 : $M = \{d, e, f, g, h, i\}$

d :	0	6	9	16	12	14	-	-	-
	a	b	c	d	e	f	g	h	i

p :	a	a	a	c	b	c	-	-	-
	a	b	c	d	e	f	g	h	i

– étape 4 : $M = \{d, f, g, h, i\}$

d :

0	6	9	16	12	14	23	-	-
a	b	c	d	e	f	g	h	i

p :

a	a	a	c	b	c	e	-	-
a	b	c	d	e	f	g	h	i

– étape 5 : $M = \{d, g, h, i\}$

d :

0	6	9	16	12	14	23	24	-
a	b	c	d	e	f	g	h	i

p :

a	a	a	c	b	c	e	f	-
a	b	c	d	e	f	g	h	i

– étape 6 : $M = \{g, h, i\}$

d :

0	6	9	16	12	14	23	23	-
a	b	c	d	e	f	g	h	i

p :

a	a	a	c	b	c	e	d	-
a	b	c	d	e	f	g	h	i

– étape 7 : $M = \{h, i\}$

d :

0	6	9	16	12	14	23	23	35
a	b	c	d	e	f	g	h	i

p :

a	a	a	c	b	c	e	d	g
a	b	c	d	e	f	g	h	i

– étape 8 : $M = \{i\}$

d :

0	6	9	16	12	14	23	23	34
a	b	c	d	e	f	g	h	i

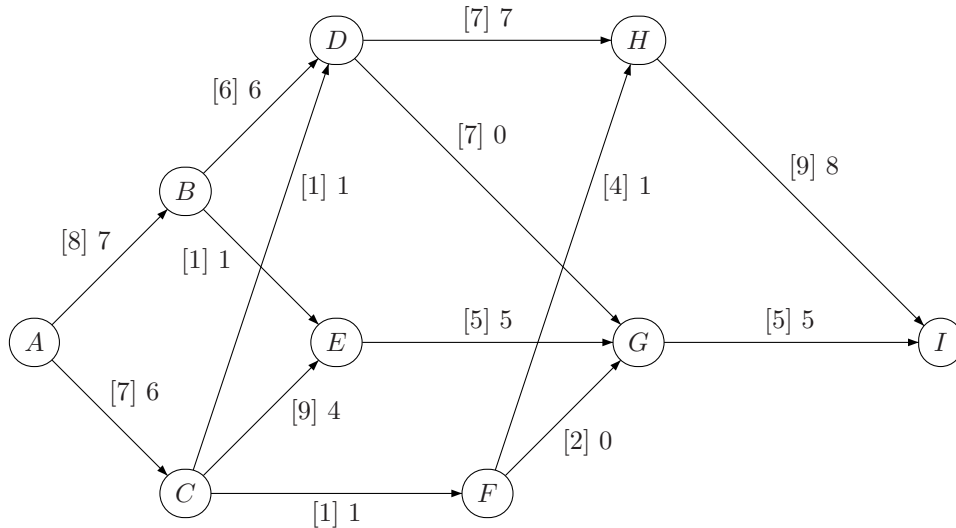
p :

a	a	a	c	b	c	e	d	h
a	b	c	d	e	f	g	h	i

Le plus court chemin entre a et i vaut donc 34, c'est le chemin $a \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow h \rightarrow i$.

5.1.1 débit maximal actuel

Prenons comme flot initial, le flot suivant :



L'algorithme de Ford-Fulkerson donne :

sommet	A	B	C	E
sommet	-	A	A	C
sommet	-	+1	+1	+5

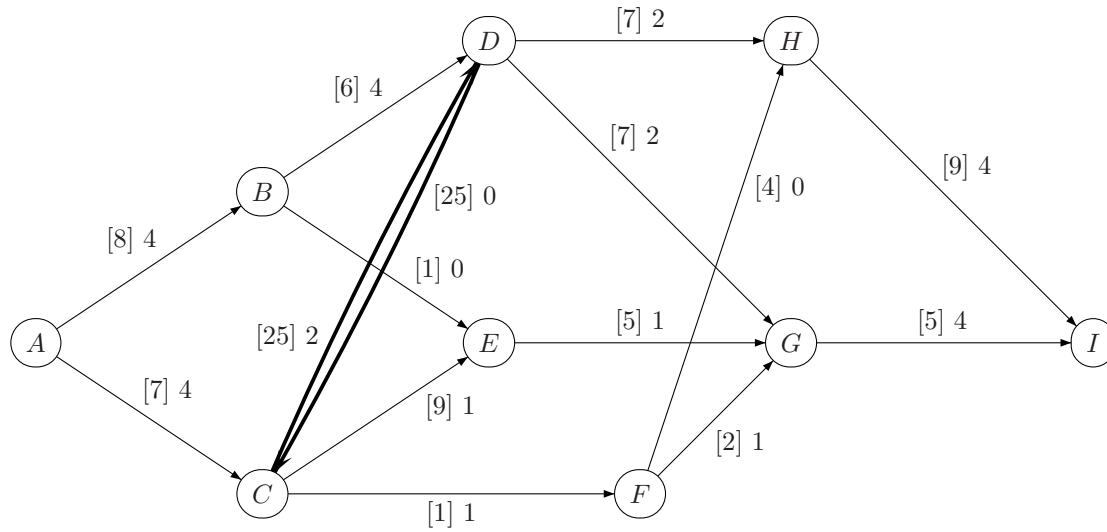
Le sommet I ne pouvant être marqué, le flot maximal a été trouvé, sa valeur étant : 13.

5.1.2 construction de l'autoroute

La coupe minimale est donnée par les sommets marqués lors de la dernière étape de l'algorithme de Ford-Fulkerson : $Y = \{A, B, C, E\}$ et $\bar{Y} = \{D, F, G, H, I\}$

Il y a donc intérêt à commencer par le tronçon appartenant à cette coupe soit le tronçon $C \rightarrow D$

On obtient alors le graph suivant avec un flot initial :



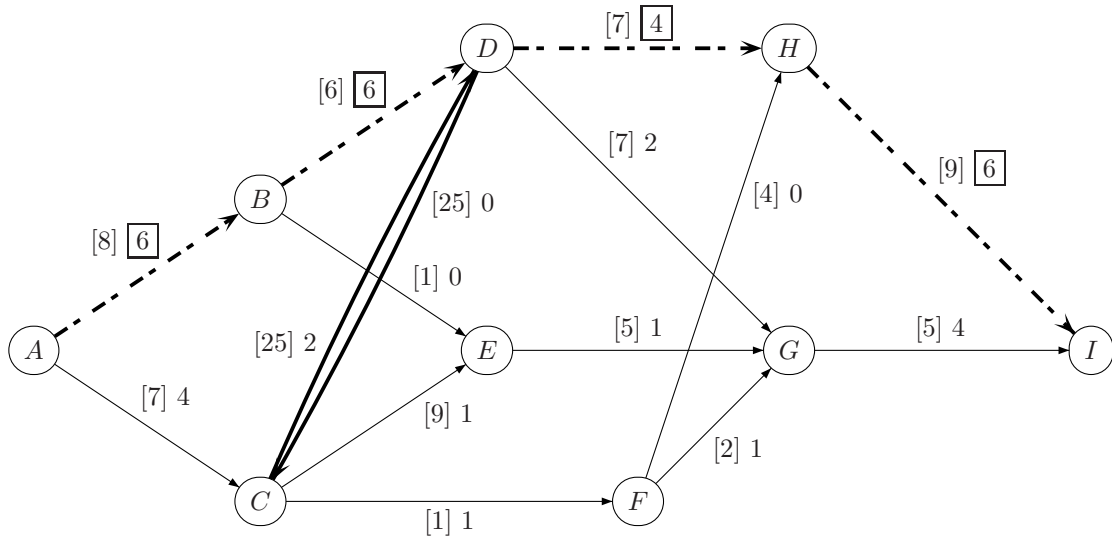
le tableau de marquage des sommets donne :

sommet	A	B	C	D	E	H	G	I
marque	-	A	A	B	D	D	D	H
gain	-	+4	+3	+2	+1	+3	+5	+5

On a donc la chaîne améliorante suivante :

$$A \xrightarrow{+4} B \xrightarrow{+2} D \xrightarrow{+3} H \xrightarrow{+5} I$$

avec $\mu^+ = \{4, 2, 3, 5\}$ et $\mu^- = \{\}$ d'où $\boxed{\epsilon(\mu) = 2}$.
on obtient alors le flot suivant :



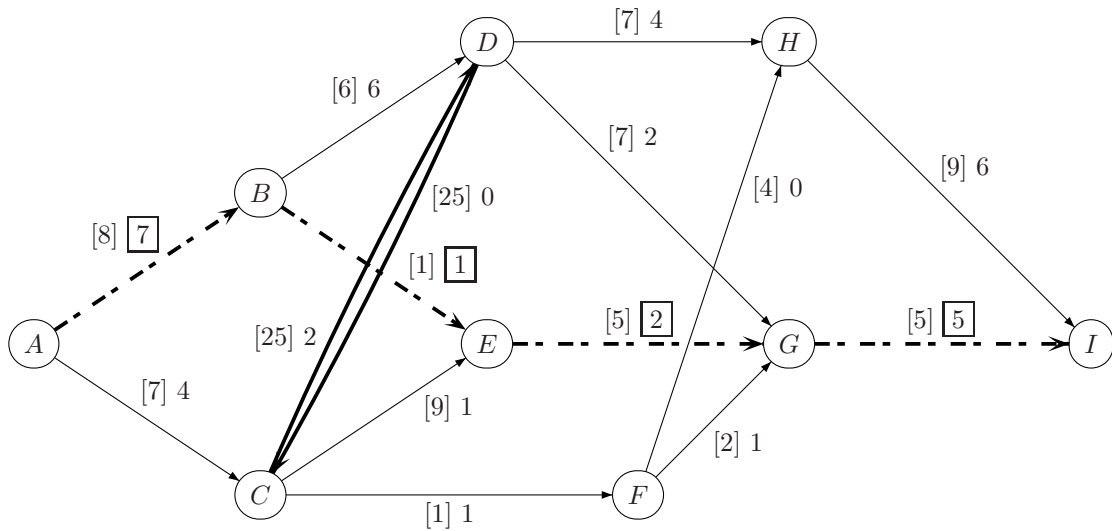
le tableau de marquage des sommets donne :

sommet	A	B	C	E	D	G	H	I
marque	-	A	A	B	C	E	D	G
gain	-	+2	+3	+1	+23	+4	+1	+1

On a donc la chaîne améliorante suivante :

$$A \xrightarrow{+2} B \xrightarrow{+1} E \xrightarrow{+4} G \xrightarrow{+1} I$$

avec $\mu^+ = \{2, 1, 4, 1\}$ et $\mu^- = \{\}$ d'où $\epsilon(\mu) = 1$.
on obtient alors le flot suivant :



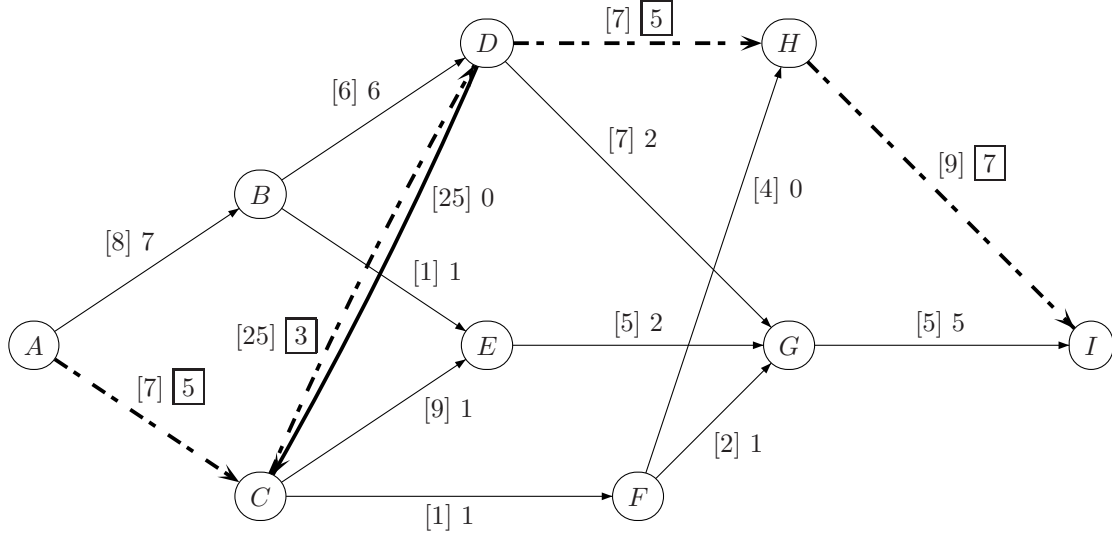
le tableau de marquage des sommets donne :

sommet	A	B	C	D	E	H	G	I
marque	-	A	A	C	C	D	D	H
gain	-	+1	+3	+23	+8	+1	+5	+3

On a donc la chaîne améliorante suivante :

$$A \xrightarrow{+3} C \xrightarrow{+23} D \xrightarrow{+1} H \xrightarrow{+3} I$$

avec $\mu^+ = \{3, 23, 1, 3\}$ et $\mu^- = \{\}$ d'où $\boxed{\epsilon(\mu) = 1}$.
on obtient alors le flot suivant :



le tableau de marquage des sommets donne :

sommet	A	B	C	D	E	G	F	H	I
marque	-	A	A	C	C	D	G	F	H
gain	-	+1	+2	+22	+8	+5	-1	+4	+2

On a donc la chaîne améliorante suivante :

$$A \xrightarrow{+2} C \xrightarrow{+22} D \xrightarrow{+5} G \xrightarrow{-1} F \xrightarrow{+4} H \xrightarrow{+2} I$$

avec $\mu^+ = \{2, 22, 5, 4, 2\}$ et $\mu^- = \{-1\}$ d'où $\boxed{\epsilon(\mu) = 1}$.
on obtient alors le flot suivant :



Le sommet I ne peut être marqué, on a donc le nouveau flot max après la construction du nouveau tronçon qui vaut 13 (pas de modif)

la nouvelle coupe minimale est donnée par : $Y = \{A, B, C, D, E, G\}$ et $\bar{Y} = \{F, H, I\}$

Le deuxième tronçon doit donc être le tronçon $D - H$

On reprends donc l'algo, avec le nouveau tronçon et avec le flot initial suivant :

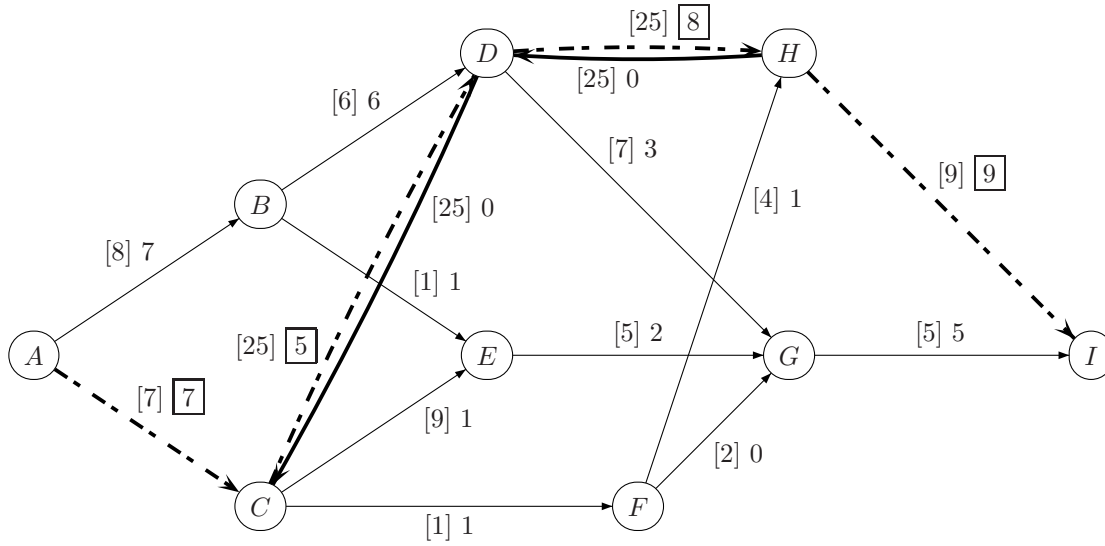


sommet	A	B	C	D	E	h	G	I
marque	-	A	A	C	C	D	D	H
gain	-	+1	+1	+21	+8	+18	+4	+1

On a donc la chaîne améliorante suivante :

$$A \xrightarrow{+1} C \xrightarrow{+21} D \xrightarrow{+18} H \xrightarrow{+1} I$$

avec $\mu^+ = \{1, 21, 18, 1\}$ et $\mu^- = \{\}$ d'où $\boxed{\epsilon(\mu) = 1}$.
on obtient alors le flot suivant :



le tableau de marquage des sommets donne :

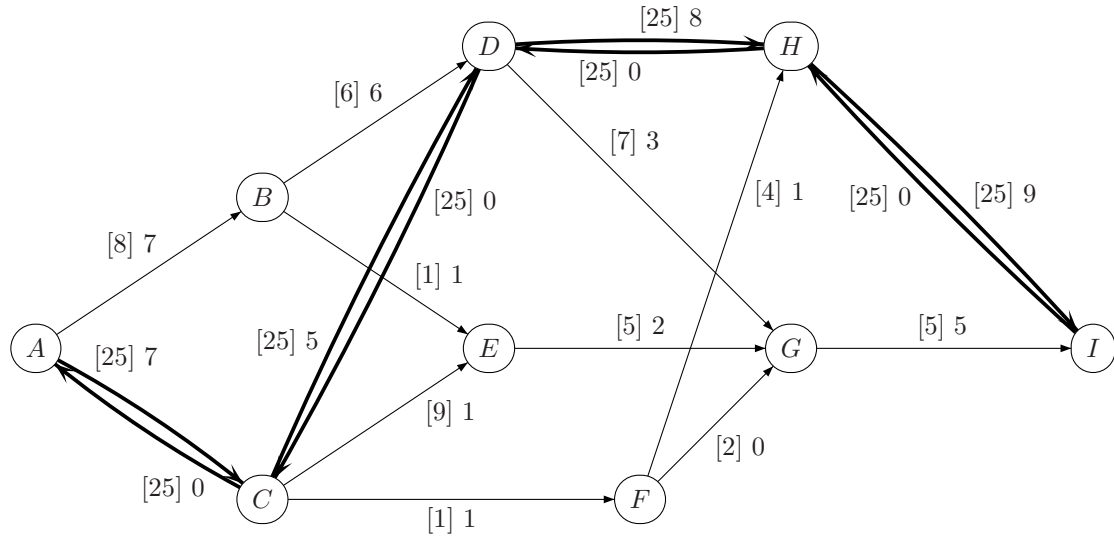
sommet	A	B
marque	-	A
gain	-	+1

le flot max après construction du second tronçon est de 14. la nouvelle coupe minimale est donnée par : $Y = \{A, B\}$ et $\bar{Y} = \{C, D, E, F, G, H, I\}$

Le troisième tronçon doit donc être le tronçon $A - C$

...

Une fois tous les tronçons construits, on obtient le graphe suivant avec le comme flot initial :



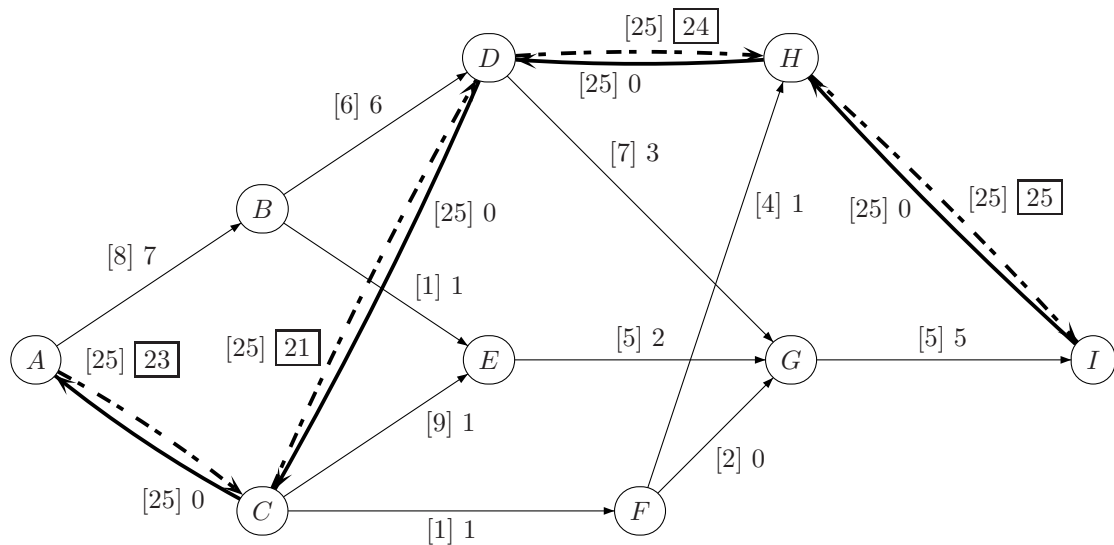
le tableau de marquage des sommets donne :

sommet	A	B	C	D	E	H	G	I
marque	-	A	A	C	C	D	D	H
gain	-	+1	+18	+20	+8	+17	+4	+16

On a donc la chaîne améliorante suivante :

$$A \xrightarrow{+18} C \xrightarrow{+20} D \xrightarrow{+17} H \xrightarrow{+16} I$$

avec $\mu^+ = \{18, 20, 17, 16\}$ et $\mu^- = \{\}$ d'où $\epsilon(\mu) = 16$.
on obtient alors le flot suivant :



le tableau de marquage des sommets donne :

sommet	A	B	C	D	E	H	G	F
marque	-	A	A	C	C	D	D	H
gain	-	+1	+2	+4	+8	+1	+4	-1

le flot max après construction du second tronçon est de 30.