

Examen de Recherche Opérationnelle
 Cours de P. MOREL

Durée 2heures, tout moyen de calcul et tout document autorisé

Exercice 1

Reformuler les problèmes suivants comme des programmes linéaires en variables mixtes (réelles et entières):

1° $Z_{\min} = 2x_1 - 7x_2$
 $0 \leq x_1 \leq 10$
 $0 \leq x_2 \leq 10$
 et l'une au moins des inégalités suivantes: $-2x_1 + 3x_2 \geq 0$
 $5x_1 - 4x_2 \geq 0$

2° $Z_{\min} = c \cdot x$
 $Ax = b$
 $x \geq 0$
 $x_i \in \{r_1, r_2, r_3, \dots, r_p\}$

3° $Z_{\min} = 3x_1 + 2x_2 - 5x_3$
 $0 \leq x_1 \leq 5$
 $x_2 \in \{2, 3, 6\}$
 l'une au moins des deux inégalités suivantes est vérifiée:
 $-3x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 0$
 $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 0$ et exactement deux des suivantes:

$x_1 - x_2$	≥ 0
$x_1 - x_3$	≥ 0
$x_2 + x_3$	≥ 2
$x_1 + x_2 + x_3$	≥ 4

Exercice 2

Une entreprise fabrique les produits A, B et C à l'aide des machines M1 et M2. La machine M1 fonctionne a heures par mois, tandis que M2 fonctionne b heures par mois. Le tableau ci-dessous résume les contraintes de fabrication, les gains unitaires

	A	B	C	Stocks
M1	1	1	1	a
M2	1	2	5	b
Gains	3	4	5	

1- L'entrepreneur désire maximiser son revenu mensuel.

Mettre ce problème P en équations.

- 2- Ecrire le problème D, dual de P.
Pouvez-vous lui donner une interprétation économique ?
- 3- Discutez suivant les valeurs du rapport a/b l'unicité de solution de D et donner dans chaque cas la solution optimale en fonction de a et de b .
- 4- Dans le cas $0.5 < a/b < 1$ en déduire la solution optimale de P.

Exercice 3

A un poste de douane, habituellement peu fréquenté, un seul agent est affecté au contrôle des automobiles; toutefois, dès que au moins 3 autos sont présentes, un second douanier vient à la rescousse et contrôle les véhicules en parallèle avec son collègue et indépendamment. Chaque voiture n'est contrôlée qu'une seule fois!!

Une étude statistique a permis d'établir que les arrivées aléatoires des autos sont régies par une loi de Poisson de paramètre λ et que d'autre part les durées aléatoires des contrôles suivent une loi exponentielle de paramètre μ .

- 1° Donner la condition pour que le poste de douane ne soit pas engorgé
- 2° On notera E_k l'état pour lequel k voitures sont présentes en attente ou en train d'être fouillée. Associer un processus d'attente et dessiner un diagramme des flux.
- 3° On suppose l'existence d'un régime permanent. Soit alors p_k la probabilité de E_k . On pose $\rho = \lambda/\mu$. Exprimer p_k en fonction de p_0, ρ et k . Evaluer les p_k $k = 0, 1, \dots$
- 4° Evaluer le nombre moyen de douaniers occupés. Interpréter cette relation en terme de conservation des flux.