

Exercice 1

Des clients potentiels arrivent dans un salon de coiffure pour hommes, ou travail un seul coiffeur, suivant un processus de Poisson de paramètre λ . Une proportion p des clients désire une coupe de cheveux tandis que les autres veulent se faire raser la barbe. Les durées de service sont des variables aléatoires qui suivent des lois exponentielles de paramètres μ_1 et μ_2 respectivement. Lorsqu'un client potentiel arrive et trouve deux clients dans le système: l'un en train de se faire couper les cheveux, l'autre en train d'attendre, il se décourage et cherche un autre coiffeur.

- 1° Dénombrer les états du système et dessiner le graphe des transitions associées au processus.
- 2° Ecrire les équations que doivent satisfaire les probabilités limites (en régime stationnaire)
- 3° Donner la probabilité que le salon soit plein, en termes des probabilités limites; c'est aussi la proportion du temps pendant laquelle le salon est plein
- 4° Quelle est la proportion, en termes des probabilités limites, de clients perdus?
- 5° quelle est l'espérance de la durée du séjour dans le salon pour un client qui ENTRE?
- 6° Résoudre numériquement dans le cas $\lambda=1/12$, $p=1/2$, $\mu_1=1/16$, $\mu_2=1/8$. et donner les valeurs numériques des résultats des questions précédentes.

Note Pour facilité la résolution numérique du système linéaire déterminant les probabilités limites et si on note p_0 la probabilité que le salon soit vide, on peut montrer que $p_0=108/318$

Exercice 2

Etant donné un ensemble de tâches numérotées de 1 à n on désigne respectivement par d_i et t_i la durée et la date de début d'exécution de la tâche i . Si la tâche j ne peut commencer que lorsque la tâche i est terminée on dit que les tâches i et j sont liées par une contrainte d'antériorité qui s'exprime par: $t_j - t_i \geq d_i$

On dit que l'on a un problème d'ordonnement simple lorsqu'il s'agit de trouver un calendrier pour la réalisation de l'ensemble des tâches dont les durées sont données, qui doit respecter un ensemble de contraintes d'antériorité de manière simultanée. Ajoutons 2 tâches fictives de durée nulle: le "début" $i=0$ et la "fin" $i=n+1$ et soit

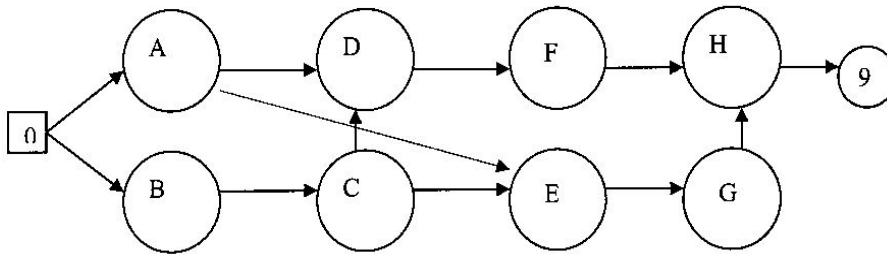
$$U = \{(i, j) \mid i \text{ et } j \text{ sont liées par une contrainte d'antériorité}\}$$

- 1.1° Montrer que le problème d'ordonnement simple s'écrit comme un programme linéaire de fonction économique

$Z_{\min} = t_{n+1} - t_0$, et dont on précisera les contraintes ; en particulier doit on introduire une contrainte sur les t_i ?

1.2° On considère le cas particulier suivant de 8 tâches A, B, C, D, E, F, G, H. Le tableau suivant donne les contraintes d'antériorité dans sa seconde colonne et la durée des tâches dans la troisième.

Tâches	Prédécesseurs	Durée normale: d_i	Durée minimale: l_i	Coût unitaire: k_i
A		10	7	4
B		5	4	2
C	B	3	2	2
D	A C	4	3	3
E	A C	5	3	3
F	D	6	3	5
G	E	5	2	1
H	F G	5	4	4



Ecrire pour ce cas particulier de manière détaillée le programme linéaire correspondant.

2° Par une inspection directe, ou un algorithme efficace, qui n'est certainement pas le simplexe(!), donner le calendrier optimal, c'est à dire la date de début au plus tôt de chaque tâche. En déduire les variables de base, les contraintes saturées, ... dans le programme linéaire.

3° On envisage maintenant un problème moins simple dans lequel les durées des tâches sont a priori inconnues; elles sont seulement majorées et minorées (Cf colonne 4). Pour réduire d'une unité de temps la durée de la tâche d_i il en coûte k_i (Cf colonne 5).

3.1° Ecrire le programme linéaire qui donne la durée minimale : $D(\infty)$ si on possède un budget illimité $B = \infty$

3.2° Si on se fixe un budget B , écrire le programme linéaire qui a budget fixé minimise la durée totale du projet. $D(B)$

3.3° Montrer que la fonction $B \rightarrow D(B)$ est continue, linéaire par morceaux convexe

4° On se place dans les conditions de la question précédente, mais cette fois on veut une durée déterminée

4.1° Ecrire le programme linéaire qui donne le budget minimal pour assurer une durée D inférieure ou égale à T fixé

4.2 Ecrire le programme qui donne le budget minimal pour une durée minimale

5° Pour l'exemple introduit écrire les divers programmes linéaires envisagés