Entropie

Information de l'évènement A : $I(A) = -\log(P(A))$

Si A et B sont indépendants alors $I(AB) = I(A) + I(B)$

Entropie

L'entropie de $X=\{A_i\}$ est l'espérance mathématique de la quantité d'information apportée à la réalisation de $X=x_i$ avec la probabilité $P(X=x_i)=p_i$

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2(p_i)$$

$H(X) \leqslant \log_2 n$

Lemme de Gibbs : Si $\sum_i q_i = \sum_i p_i = 1$ alors $-\sum_i p_i \log_2 p_i \leqslant -\sum_i p_i \log_2 q_i$

Entropie totale

$H(X,Y) = -\sum_{ij} p_{ij} \log_2(p_{ij})$ avec $p_{ij} = P(X=x_i, Y=y_j)$, $p_i = P(X=x_i)$ et $q_j = P(X=x_j)$

Information mutuelle

$$I(X,Y) = \sum_{ij} p_{ij} \log_2 \frac{p_{ij}}{p_i q_j}$$

$I(X,Y) \geqslant 0$

Propriétés
$H(X,Y) = H(X) + H(Y) - I(X,Y)$
$I(X,Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$

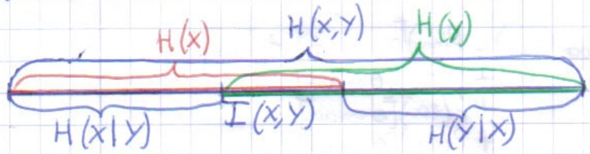
Information Conditionnelle de B | A

$I(B|A) = I(A \cap B) - I(A)$

Entropie Conditionnelle de Y sachant X

$$H(Y|X) = -\sum_{ij} p_{ij} \log_2 \frac{p_{ij}}{p_i}$$

$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X)$
$\quad = H(Y) + H(X|Y)$
$H(X) = I(X,Y) + H(X|Y)$
$H(Y) = I(X,Y) + H(Y|X)$



Déchiffrage des codes

Source $S = (S_1, \ldots, S_n)$ avec $P(S_i) = p_i$
Source S^r est la source qui émet r symboles successivement de manière indépendante

$H(S^r) = r\, H(S)$

Codes préfixes

Un code est un code préfixe si aucun des mots du code n'est préfixe d'un autre mot du code

Un ensemble préfixe de mots est défini pareil

Efficacité des codes

- Longueur moyenne $E(L) = p_1 l_1 + p_2 l_2 + \ldots + p_n l_n$ (l_i sont les longueurs)

Efficacité $e = \frac{H(S)}{E(L)}$ $\quad e \leqslant 1$

code u.d $\Rightarrow E(L) \geqslant \frac{H(S)}{\log M}$

d'où $E(L) < \frac{H(S)}{\log M} \Rightarrow$ code non u.d.

avec M la base du log utilisé pour calculer H, généralement $M=2$

Codes préfixes optimaux

Soit S qui émet les symboles $\{s_i\}$ avec probabilité p_i. On suppose (ce qui ne restreint pas la généralité) que $p_1 \geqslant \ldots \geqslant p_n$.
Alors $\exists$ un code binaire préfixe optimal qui vérifie ① $l_1 \leqslant l_2 \leqslant \ldots \leqslant l_n$
② $l_{n-1} = l_n$ ③ les mots qui codent S_n et S_{n-1} ne diffèrent que du dernier bit

Fonction de Kraft de L $\quad K(L) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{M^{l_j}}$ (l_j étant la longueur)

Condition de Kraft $\quad K(L) \leqslant 1$

Code préfixe $\Longleftrightarrow$ condition de Kraft vérifiée

Compression de donnée

Compression RLE

On code une chaine de caractère par une suite de paire (s, n).

Exemple 0000 111 00000000 00 1111

(0,4) (1,3) (0,8) (0,2) (1,4)

0 011 1010 0111 0 001 1 011

Exemple de décodage avec bruits

Par groupe de 3

source décodé	probabilité	source codée	message reçu
000	$0{,}99^3$	000 ... 000	000
		100	
		010	
		001	
100	$0{,}99^2 \times 0{,}01$	011 ... 011	100
010	$0{,}99^2 \times 0{,}01$	101 ... 101	010
001	$0{,}99^2 \times 0{,}01$	110 ... 110	001
110	$0{,}99 \times 0{,}01^2$	111 ... 111	110
101	$0{,}99 \times 0{,}01^2$	111	poubelle
011	$0{,}99 \times 0{,}01^2$	111	
111	$0{,}01^3 \simeq 0$	111	

- $P(\text{décodage émis}) = \sum P(\text{code reçu})\,[\varepsilon \text{ ou } (1-\varepsilon)]$ selon l'erreur ou pas

ici

$$P(\text{décodage émis}) = P(000)[0 \text{ erreur} + 3\times 1 \text{ erreur}] + P(010)[0 \text{ erreur}] + P(100)[0 \text{ erreur}] + P(001)[0 \text{ erreur}] + P(110)[0 \text{ erreur}]$$

donc

$$P(\text{décodage émis}) = 0{,}99^3 \times (0{,}95^3 + 3\times 0{,}95^2 \times 0{,}05) + 3\times(0{,}99^2 \times 0{,}01)\times 0{,}95^3 + (0{,}99\times 0{,}01^2)\times 0{,}95^3$$

$$P(\text{décodage émis}) = 0{,}9886$$

- $P(\text{décodage erroné}) = P(000)[2 \text{ ou } 3 \text{ erreurs}] + 3P(010)[1,2 \text{ ou } 3 \text{ erreurs}] + P(110)[1,2 \text{ ou } 3 \text{ erreurs}] + P(101) + P(011) + P(111)$

$$P(\text{décodage erroné}) = 0{,}99^3((0{,}05)^3 + 3(0{,}05)^2 0{,}95) + 3\times 0{,}99^2 \times 0{,}01(+ 0{,}99\times 0{,}01^2(1-(0{,}95)^3) + 2\times 0{,}99 \times 0{,}01^2 + 0{,}01^3$$

$$P(\text{décodage erroné}) = 0{,}0114$$

on précise que $[1,2, \text{ ou } 3 \text{ erreurs}] = 1 - [0 \text{ erreur}] = 1 - 0{,}95^3$

et que $P(0) = 0{,}99$

$P(1) = 1 - 0{,}99 = 0{,}01$

Par groupe de 8 lettres

1 on a le bloc 00000000, on le code par 00000000 et on décode toutes les séquences à 0, 1, 2 ou 3 erreurs par 00000000.

$$P(\text{bonne transmission ou récupération de l'erreur}) = \binom{8}{0}0{,}95^8 + \binom{8}{1}0{,}95^7\times 0{,}05 + \binom{8}{2}0{,}95^6 \times 0{,}05^2 + \binom{8}{3}0{,}95^5 \times 0{,}05^3$$

$$= 0{,}95^8 + 8\times 0{,}95^7 \times 0{,}05 + 28\times 0{,}95^6 \times 0{,}05^2 + 56 \times 0{,}95^5 \times 0{,}05^3$$

$$= 0{,}99963$$

2 on considère le bloc 10000000

on le code par 11110100 et on décode par 10000000 toutes les séquences de 8 lettres qui correspondent à 0 ou 1 erreur.

$$P(\text{bonne} \ldots) = \binom{8}{0}0{,}95^8 + \binom{8}{1}0{,}95^7 \times 0{,}05 = 0{,}94276$$