Théorie de l'information (formulaire)

Théorie générale de l'information

- *Espace probabilisé* : (Ω, Λ, P)

- **Quantité d'information**
- *Quantité d'information* apportée par la réalisation de l'événement A : $I(A) = -\log_2 P(A)$ en bits.
- Si A et B sont indépendants, $P(AB) = P(A)P(B)$, d'où $I(AB) = I(A) + I(B)$.

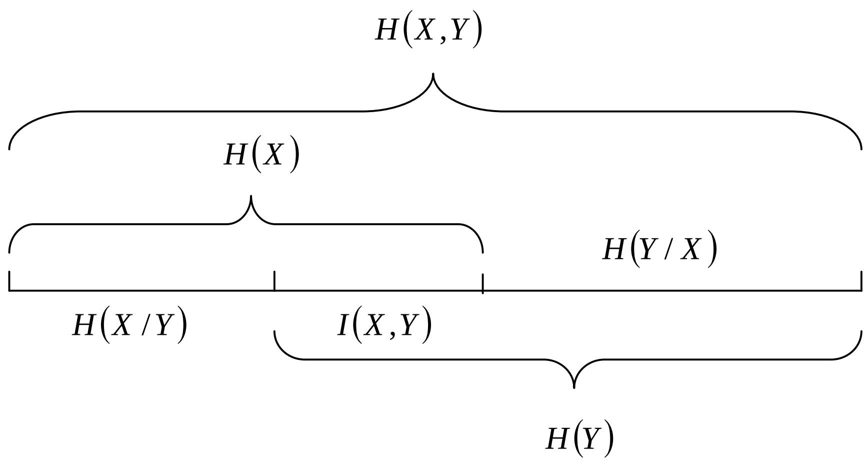
- **Entropie d'un système simple**
- *Entropie d'un système simple X, avec* $X = \{A_i\}$ *une partition de* Ω : on a $H(X) = E(I(X))$ ou encore $H(X) = -\sum_i p_i \log_2 p_i$ avec $p_i = P(A_i)$.

- **Entropie et codage**
- *Longueur du codage* : $L(C) = \sum_i p_i L(C(A_i))$.
- *Théorème* : Pour tout codage binaire *C*, $L(C) \geq H(X)$.
- *Théorème* : Il existe un codage binaire *C* tel que $H(X) \leq L(C) < H(X) + 1$.

- **Entropie d'un système composé**
- *Entropie d'un système composé* (X,Y), *avec* $X = \{A_i\}$ *et* $Y = \{B_j\}$ *deux partitions de* Ω : $H(X,Y) = E(I(X,Y))$. Posons $P(A_i B_j) = p_{ij}$, $H(X,Y) = -\sum_{i,j} p_{ij} \log_2 p_{ij}$.
- *Information mutuelle entre deux événements* A_i *et* B_j : On a $I(A_i, B_j) = I(A_i) + I(B_j) - I(A_i B_j)$ ou encore $I(A_i, B_j) = \log_2 \frac{p_{ij}}{p_i q_j}$ avec $P(A_i) = p_i$ et $P(B_j) = q_j$.
- *Information mutuelle du système* (X,Y): $I(X,Y) = -\sum_{i,j} p_{ij} \log_2 \frac{p_{ij}}{p_i q_j}$.
- $H(X,Y) = H(X) + H(Y) - I(X,Y)$

- **Entropie conditionnelle**
- *"* A/B *" : "A si on a B", "A sachant B"*
- *Probabilité conditionnelle :* $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- $H(X/Y) = E(I(X/Y)) = \sum_{i,j} p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{q_j}$ et $H(Y/X) = \sum_{i,j} p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{p_i}$
- $H(X,Y) = H(Y) - I(X,Y)$

- $H(X/Y) \le H(X)$, ou $I(X,Y) \ge 0$, ou $H(X,Y) \le H(X) + H(Y)$.
- $H(X,Y) = H(Y) + H(X/Y) = H(X) + H(Y/X)$
- *Schéma récapitulatif* :



- **Entropie et décision**
- *Stratégie uniforme* : Système à *n* états, suite de questions uniformément à *q* réponses. Nombre *r* optimal de questions : $n < q^r$ ou $r \ge \dfrac{\log n}{\log q}$.
- *Stratégie probabiliste* : Soit un système *X* et un arbre de décision associé. On suppose que chaque nœud non-terminal possède exactement *q* descendants et on définit la variable aléatoire, nombre de questions posées *N*. Alors $E(N) \ge \dfrac{H(X)}{\log_2 q}$.

Information et codage

Transmission de l'information

Compression de données