Traitement du signal

Dans l'exposé suivant, *w* et *f* désigneront des fréquences.

Signaux déterministes discrets

Echantillonnage

Soit T_e la période d'échantillonnage.

- **Spectre**

Soit *s* un signal, échantillonné à la période T_e. On identifie la suite $s(nT_e)$ à la distribution $\sum_{n\in Z} s(nT_e)\delta_{nT_e}$. *Le spectre su signal échantillonné* est la transformée de *Fourier* $F\left(\sum_{n\in Z} s(nT_e)\delta_{nT_e}\right)(w)$. Quand la somme est finie, on peut le simplifier en $\sum_n s(nT_e)e^{-2i\pi wnT_e}$ (périodique de période T_e).

Par la suite on utilisera de notations normalisées et on notera $s_n = s(nT_e)$, …

- **Lien entre le spectre de *s* et de *s* échantillonné**

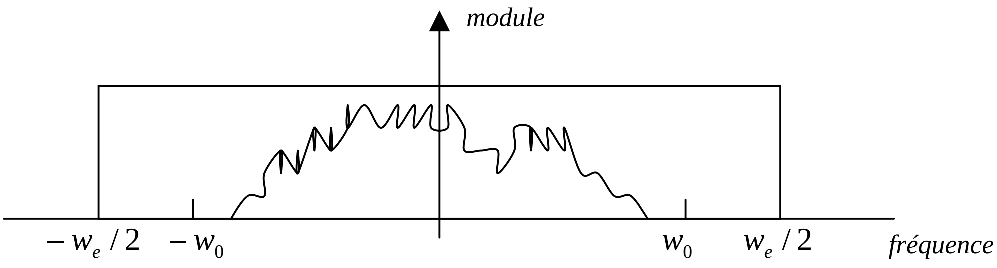
Le spectre du signal échantillonné est la somme des translatés du spectre de *s* par les quantités nw_e.

- **Théorème d'échantillonnage**

Soit *s* tel que $S = F(s)$ existe et tel que le support de $F(s) \subset [-w_0, w_0]$. Supposons que $w_e = \frac{1}{T_e} > 2w_0$ (règle de *Shanon*). Alors on a $s(t) = \sum_n s(nT_e)\sin_C(\pi(tw_e - n))$. Si on respecte la règle de *Shanon*, on remarque qu'il y a autant d'information dans le signal que dans signal échantillonné !

- **Dessin du spectre**

On respecte la règle de *Shanon*. Le spectre est périodique.



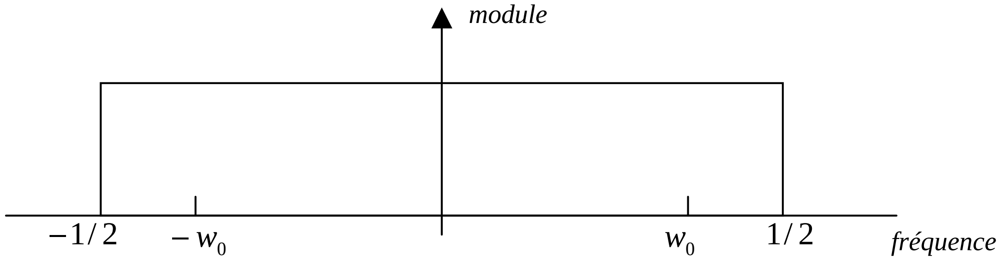
Le spectre du *Dirac* δ_w est un segment de hauteur conventionnelle placé à la fréquence *w*.

- **Théorème : pertes d'informations**

s et $F(s)$ ne peuvent être tous deux à support borné. En pratique *s* est à support borné, donc $F(s)$ ne peut jamais l'être. Par conséquent, on ne peut pas respecter la condition « *support de* $F(s) \subset [-w_0, w_0]$ ». On va donc faire une approximation, et il va y avoir des pertes d'informations.

- **Unités normalisées**

1 unité normalisée en temps = T_e secondes
1 unité normalisée en fréquence = w_e Hz



La règle de *Shanon* s'écrit $1 > 2w_0$. En unité normalisé, $s(nT_e)$ est noté s_n. Cette dernière notation va nous permettre de travailler plus aisément dans l'espace des suites.

- **Energie et puissance d'un signal**

Pour un signal *s*, on définit son *énergie* dans le domaine continue par $E(s) = \int |s(t)|^2\, dt$ et dans le domaine discret par $\sum_n |s_n|^2$. La *puissance moyenne* est définie dans le domaine continu par $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |s(t)|^2\, dt$ et dans le domaine discret par $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} |s_n|^2$.

Transformé en z

- **Définition**

L'écriture formelle de *la transformée en z* d'une suite (x_n) est $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n z^{-n}$. Au sens rigoureux, il faut considérer deux séries entières : pour $n \le 0$, on considère $S_1 = \sum_{m=0}^{+\infty} x_{-m} z^m$ de rayon de convergence R_1 et pour $n > 0$, on considère $S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n t^n$ avec $t = \frac{1}{z}$, de rayon de convergence R_2. On précisera toujours le domaine de convergence de la transformée en z : $\left\{ z, \frac{1}{R_2} < |z| \right\} \cap \{ z, |z| < R_1 \}$.

- **Exemple fondamental**

- Soient *a > 0*, $x_n = \begin{cases} a^n \ si\ n \ge 0 \\ 0 \ si\ non \end{cases}$. La transformée en z s'écrit $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \frac{z}{z-a}$, convergente pour $|z| > a$.
- Soient *b > 0*, $x_n = \begin{cases} 0 \ si\ n \ge 0 \\ -b^n \ si\ n < 0 \end{cases}$. La transformée en z s'écrit $\sum_{n<0} -b^n z^{-n} = \frac{z}{z-b}$, convergente pour $|z| < b$.

- Soient $a > 0$, $b > 0$, $x_n = \begin{cases} a^n & si\ n \geq 0 \\ b^n & si\ n < 0 \end{cases}$. La transformée en z s'écrit $\frac{z}{z-a} + \frac{z}{z-b}$, convergente pour la couronne $b > |z| > a$.

- **Inversion de la transformée en z pour un fraction rationnelle**

- **Formule du retard**

- **Formule de la modulation**

- **Formule pour le produit de convolution**

- **Formule du produit**

- **Théorème de *Wiener – Kinchine***

Soit un signal *x*. Si le domaine de convergence de X_z contient le cercle unité, $(|z| = 1$, donc $\forall w \in R$ on peut poser $z = e^{2i\pi w})$ alors on retrouve $X(w) = X_z\left(e^{2i\pi w}\right) = \sum_n x_n e^{-2i\pi wn}$, le spectre de *x*.

- La *densité spectrale d'énergie* est $|X(w)|^2$.
- L'énergie du signal comprise entre les fréquences w_1 et w_2 est $\int_{w_1}^{w_2} |X(w)|^2 dw$.
- *L'énergie du signal* est $\int_{-1/2}^{1/2} |X(w)|^2 dw = \sum_n x_n^{\ 2}$. Le signal est *d'énergie finie* si la série est convergente.
- *L'autocorrélation temporelle d'énergie* est $\gamma_k = \sum_n \overline{x_n} x_{n+k}$ (réelle et paire).

Le théorème démontre que le spectre de γ est aussi la densité spectrale d'énergie de *x* : $\Gamma(w) = |X(w)|^2$.

- **Effet de la limitation en temps de l'observation**

On observe le signal au travers une fenêtre d'analyse rectangulaire (porte continue) de largeur *N*. Nous allons voir quels sont les effets sur le spectre. Le spectre du *Dirac* est modifié en un lobe principale, plus des lobes parasites. La largeur du lobe principale $2/N$ est inversement proportionnel à la taille de la fenêtre d'analyse. Ainsi plus *N* est grand, plus le lobe principal est fin, mais le lobe secondaire ne diminue pas de hauteur (parasite). Afin de distinguer 2 lobes susceptibles de se chevaucher, on devra prendre en compte la condition $\Delta w > \frac{2}{N}$. Une solution consiste à augmenter *N*, mais ce n'est pas aussi simple… Pour éliminer les lobes secondaires, on peut utiliser de nouveaux modèles de fenêtre : fenêtre d'apodisation, fenêtre de *Hamming*.

Filtres

- **Généralités**

Représentation générale d'un filtre :

$$(x_n)_{n\in Z} \longrightarrow \boxed{\textit{Filtre}} \longrightarrow (y_n)_{n\in Z}$$

- $y = h * x$, ou encore $y_n = \sum_k h_k x_{n-k}$
- $Y_z = H_z . X_z$, avec H_z la *fonction de transfert* du filtre
- formule des spectres : $Y(w) = H(w).X(w)$

- formule des densités spectrales d'énergie : $\left|Y(w)\right|^2 = \left|H(w)\right|^2 . \left|X(w)\right|^2$, avec $\left|H(w)\right|^2$ le *gain*

- **Filtres LIT**

Les filtres LIT sont *linéaires*, *invariants par translation*, *continues* dans le sens où si la suite des signaux d'entrée ressemble à *(x_n)* alors la suite des signaux de sortie ressemblera à *(y_n)*.
Soit *h* la réponse impulsionnelle du filtre. On a effectivement $y = h * x$.

- **Filtres RIF**

Les filtres RIF sont dits *à réponse impulsionnelle finie*. *h* est RIF si $(h_k)_{k \in Z}$ possède un nombre fini de coefficients non nuls.

- **Filtres RII**

Les filtres RII, dits *à réponse impulsionnelle infinie*, ne s'applique que sur les suites bornées.

- **Filtre causal**

La sortie à l'instant *t* ne dépend que de ce qui est arrivé avant *t*. Autrement dit, y_n ne dépend que des x_k pour $k \le n$, ce qui implique : $\forall m < 0, h_m = 0$.

- **Stabilité**

Un filtre est stable si, pour toute suite bornée en entrée, il fournit une suite bornée en sortie ; c'est-à-dire si et seulement si $\sum_n \left|h_n\right| < \infty$.

Soit *h* un filtre causal tel que $H_z(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$. Alors *h* est stable si et seulement si les zéros de *Q* sont de modules < 1.

- **Filtres à phase linéaire**

Soit *h* un filtre RIF. Il est dit *à phase linéaire* si $H(w) = R(w)e^{i\varphi(w)}$ avec $\varphi(w) = 2\pi w\tau + w_0$. τ représente le temps de passage dans le filtre.

- **Génération de filtres**

On souhaite construire un filtre qui épouse un gabarit[1] donné (exemple du filtre passe-bas qui présente une bande passante et deux bandes affaiblies symétriques). Un première méthode consiste à vouloir utiliser le développement de *Fourier*. Cette méthode produit une série infinie de coefficient, or on a intérêt à avoir le moins de coefficients possibles ! Une autre méthode consiste à appliquer les moindres carrés. Cependant, cette méthode n'offre aucune garantie théorique pour le respect du gabarit. Une autre méthode encore consiste à employer l'algorithme de *Rémès* (le gabarit doit être une fonction continue, obtention d'un polynôme de degrés *r* avec *r+2* le nombre de points).

- **Approximation d'un filtre RII par un filtre RIF**

Etant donné un filtre RII, on souhaite approximer ce filtre par un filtre RIF causal d'ordre *N* : $h_0 \cdots h_{N-1}$. On se donne *M* équations de la forme $y_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k x_{n-k}$ avec $M >> N$, et on résout le système ainsi obtenu par la méthode des équations normales.

[1] toujours symétrique

Filtres RII récursifs

- **Cellule élémentaire du 1^er^ ordre**

La cellule élémentaire du 1er ordre possède un équation de la forme $y_n = a_1 y_{n-1} + b_0 x_n + b_1 x_{n-1}$. Ce qui s'écrit encore $a * y = b * x$, avec $a = (0\ldots0,1,-a_1,0\ldots0)$ et $b = (0\ldots0,b_0,b_1,0\ldots0)$. L'équation en z s'écrit $A_z Y_z = B_z X_z$, avec $A_z(z) = 1 - a_1 z^{-1}$ et $B_z(z) = b_0 - b_1 z^{-1}$. Le domaine de convergence est $|z| > |a_1|$. Par conséquent, ce filtre est stable si $|a_1| < 1$.

Si $b_0 = 1$ et $b_1 = 0$, la cellule est dite purement récursive. Comme $Y_z(z) = \frac{1}{A_z(z)} X_z(z)$, on identifie $H_z(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}}$. On se retrouve dans le cas de la série géométrique déjà traitée en exemple $h_n = a_1^{\ n}$.

- **Cellule élémentaire du 2ème ordre**

La cellule élémentaire du 2ème ordre est de la forme $y_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + b_2 x_{n-2}$. Ce qui s'écrit encore $a * y = b * x$, avec $a = (0\ldots0,1,-a_1,-a_2,0\ldots0)$ et $b = (0\ldots0,b_0,b_1,b_2,0\ldots0)$. L'équation en z s'écrit $A_z Y_z = B_z X_z$, avec $A_z(z) = 1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}$ et $B_z(z) = b_0 - b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$.

Si $b_0 = 1$, $b_1 = 0$ et $b_2 = 0$, la cellule est dite purement récursive. Comme $Y_z(z) = \frac{1}{A_z(z)} X_z(z)$, on identifie $H_z(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$. Dans le cas où $A_z(z^{-1})$ admet 2 racines réelles r_1 et r_2, on peut écrire le transfert sous la forme d'un produit de deux cellules du 1er ordre $H_z(z) = \frac{1}{(1 - r_1 z^{-1})} \cdot \frac{1}{(1 - r_2 z^{-1})}$. On obtient alors $h = h_1 * h_2$. Le filtre est stable si $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$.

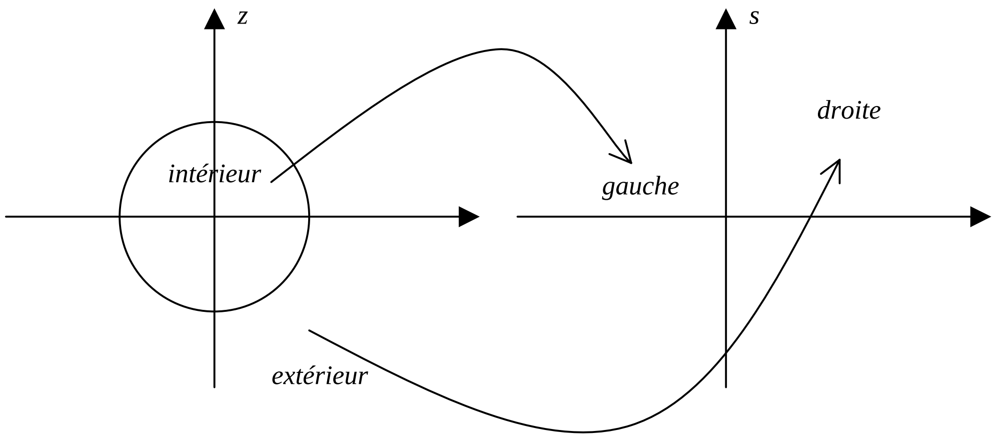
- **Cas général d'un filtre récursif**

Cas généralisé de l'étude précédente. Le filtre se décompose en une cascade de cellules élémentaires du 1er ordre et du 2ème ordre.

- **Divers mode de représentation**

- $z = e^{2i\pi w}$
- $z = \frac{1+s}{1-s}$, avec $s \in C/\{1\}$
- $s = \frac{z-1}{z+1}$, avec $z \in C/\{-1\}$
- $s = i\tan(\pi w)$
- $s' = \frac{s}{i}$ (rotation de -90° par rapport à *s*)

Le filtre est stable si les racines en z du dénominateur sont à l'intérieur du disque unité, ou si les racines en *s* sont à gauche.



- **Filtre récursif passe-bas de *Butterworth***

Ce filtre est défini par la relation $|B(s')|^2 = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{s'}{\alpha}\right)^{2n}}$. A la suite de savant calcul, on détermine, dans le cas n impair, que la fonction de transfert est de la forme une cellule récursive du 1er ordre est une cascade de cellule récursive du 2ème ordre…

- **Intérêts et inconvénients des filtres récursifs**

De manière générale, les filtres récursifs nécessitent moins de calculs par rapport aux filtres RIF. Mais du fait même de la récursivité, les erreurs d'arrondi et de quantification (bruits) sont amplifiées. Par conséquent, un filtre récursif s'avère moins stable.

Signaux aléatoires discrets

Les signaux aléatoires sont tels qu'il semble approprié d'introduire des notions statistiques pour les décrire. Le plus souvent, ces signaux ne sont pas modélisables par des fonctions classiques.

Processus aléatoires stationnaires

Un *processus aléatoire* est un application qui à un entier associe une variable aléatoire $n \to X_n$. Un *signal aléatoire* est une application qui à un entier associe la valeur du signal $n \to x_n$. Par exemple le choix de la phase initiale ξ est impossible à connaître : $X_n = \sin(2\pi(w_0 n + \xi))$, avec ξ une variable aléatoire qui suit la loi uniforme ou loi du hasard sur $[0,1]$.

- **Processus aléatoire stationnaire**

Un *processus aléatoire stationnaire* est tel que :

1. $\forall n, E(X_n) = m$, la *moyenne statistique* (indépendant de *n*)
2. $\forall n, E(X_x X_{n+k}) = \Gamma_k$, *l'autocorrélation statistique* (indépendant de *n*)

- **Propriétés de l'autocorrélation**

- parité : $\Gamma_{-k} = \Gamma_k$
- $\forall k, |\Gamma_k| \le \Gamma_0$

- **Processus ergodique**

Un *processus ergodique* (phase fixée) est tel que :

1. $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} X_n = m$
2. $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} X_n X_{n+k} = \Gamma_k$

Pour démontrer qu'un processus est ergodique, on utilise la convergence en probabilité, la loi des grands nombres.

- **Théorème de *Wiener - Kinchine***

Considérons un processus aléatoire X_n (ξ fixé). On définit le processus $Y_n = \begin{cases} X_n & pour -N \le n \le N \\ 0 & si\ non \end{cases}$.

- La *densité spectrale d'énergie* comprise entre -*N* et *N* est $DSE = |F(Y)|^2$.
- La *densité spectrale de puissance* comprise entre -*N* et *N* est $\frac{|F(Y)|^2}{2N+1}$.
- La *densité spectrale de puissance* est $DSP = \lim_{N\to\infty} E\left(\frac{1}{2N+1}|F(Y)|^2\right)$.

Le théorème démontre que le spectre de γ est aussi la densité spectrale de puissance : $F(\Gamma) = DSP$.

- **Bruit blanc**

Un *bruit blanc* est tel que les B_n soient indépendants, et suivent la même loi centrée.

Considérons *un bruit blanc gaussien* : B_n suit $N(0,\sigma)$. On démontre que c'est *un processus aléatoire, stationnaire, ergodique* :

- $m = 0$
- $\Gamma_k = \begin{cases} 0 & si\ k \neq 0 \\ \sigma^2 & si\ non \end{cases}$
- $DSP(w) = \sigma^2$

Analyse temps – fréquence

Transformée de *Fourier* à fenêtre glissante, *périodogramme*, méthode *pseudo Wigner - Ville lissée*…

Couple aléatoire stationnaire, intercorrélation

- **Couple aléatoire *(X,Y)***

Un couple *(X,Y)* est stationnaire si :

1. *X* et *Y* sont stationnaires ;
2. *l'intercorrélation* $\Gamma_{XY}(k) = E(X_n Y_{n+k})$ est indépendant de *n*.

Notons les quelques propriétés de l'intercorrélation : $\Gamma_{XX}(k)$ est l'autocorrélation., $|\Gamma_{XY}(k)|^2 \le \Gamma_X(0)\Gamma_Y(0)$.

Un couple *(X,Y)* est ergodique si :

1. *X* et *Y* sont ergodiques ;
2. $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} X_n Y_{n+k} = \Gamma_{XY}(k)$.

- **Intercorrélateur**

Considérons un couple *(X,Y)* ergodique.

Formule : $\Gamma_{XY}^{n_0}(k) \cong \frac{1}{N+1} \cdot \sum_{n=n_0-N-k}^{n_0-k} X_n Y_{n+k}$.

En théorie, l'intercorrélation est indépendante de l'instant n_0, mais en pratique, on la recalcule à chaque instant.

Soit Y le translaté de X, c'est-à-dire $Y_n = X_{n-\Delta}$. On suppose X stationnaire. Alors Y est stationnaire. On démontre que $\Gamma_{XY}(k) = \Gamma_X(k-\Delta)$, qui atteint son maximum pour $k = \Delta$ car $|\Gamma_X(k)| \leq |\Gamma_X(0)|$. En définitive, le couple *(X,Y)* est stationnaire. On démontre encore qu'il est ergodique.

L'intercorrélateur permet en outre d'estimer *l'autocorrélation* Γ_{XX} en prenant $Y = X$

En appliquant un tel couple à l'entrée d'un intercorrélateur, celui-ci va permettre de déterminer Δ, la translation entre les deux signaux. Cela va permettre par exemple de mesurer une vitesse de défilement ou encore de localiser une source de bruit…

Filtrage des signaux aléatoires discrets

Généralités

Soient *h* un filtre LIT stable, *X* le processus d'entrée, *Y* le processus de sortie. On a $Y = h * X$, $y = h * x$.

- **Propriétés**

- Si X est stationnaire alors Y est stationnaire.
- formule des autocorrélations : $\Gamma_Y = \Gamma_h * \Gamma_X$, avec Γ_X, Γ_Y les autocorrélations statistiques et Γ_h l'autocorrélation temporelle.
- $\|\Gamma_h\|_1 \leq \|h\|_1^2$

- **Fourier et Wiener - Kinchine**

$DSP_Y = |H(w)|^2 DSP_X$, avec $|H(w)|^2$ le *gain du filtre*, et $H(w) = H_Z\left(e^{2i\pi w}\right)$.

Filtre optimal adapté à la détection d'un signal de forme connue

Soit *s* un signal de forme connue noyé dans un bruit blanc : $x = s + b$. Soit *d* le délai de détection. On pose $y = s_2 + b_2$ tel que $s_2 = h * s$ et $b_2 = h * b$. On cherche *h* qui rend maximum le rapport de la puissance du signal sur le bruit : $e = \frac{|s_2(d)|^2}{\int_{-1/2}^{1/2} DSP_{b_2}(w)dw}$. Or d'après le théorème de Wiener - Kinchine, on a $DSP_Y = |H(w)|^2 DSP_X$

d'où $\int_{-1/2}^{1/2} DSP_{b_2}(w)dw = \sigma^2 \|h\|^2$. $s_2 = h * s = \langle h, \tilde{s} \rangle$ avec $\tilde{s}(k) = s(d-k)$, d'où $|s_2(d)| \leq \|h\| . \|s\|$ …

h est maximum pour $h_k = s(d-k)$: car $\left|s_2(d)\right| = \|s\|^2$ et $e = \dfrac{\|s\|^2}{\sigma^2}$. Remarquons que, si $d < N$,le filtre n'est pas causal.

Filtre de *Wiener*

- **Estimation linéaire (par minimisation d'une distance)**

Considérons un processus *A* et un échantillon $X_0 \ldots X_N$ (observation). Le résultat d'une expérience fournit les valeurs $x_0 \ldots x_N$. Soit $\tilde{A}$ un estimateur linéaire, $\tilde{A} = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j X_j$ avec α_j des inconnues telles que $\tilde{A}$ rend minimum $E\left(\left(A-\tilde{A}\right)^2\right)$. Remarquons que dans l'espace vectorielle des variables aléatoire le produit scalaire est $\langle X, Y \rangle = E(XY)$. Par conséquent, il s'agit de minimiser la distance $\left\|A-\tilde{A}\right\|^2$. Par des considérations géométriques, on établit que $\forall i = 0 \ldots N, \left\langle \tilde{A} - A, X_i \right\rangle = 0$, c'est-à-dire $\sum_{j=0}^{N} \alpha_j \langle X_j, X_i \rangle = \langle A, X_i \rangle$.

- **Filtre de *Wiener***

Soit *N* fixé. Considérons A_k le processus à l'instant *k* et l'échantillon suivant $X_k \ldots X_{k-N}$ (observation, processus au *N* instants précédent). On suppose que (A, X) est un couple stationnaire. On démontre que les α_j sont indépendants de *k*. On obtient les équations : $\forall i = 0 \ldots N, \sum_{j=0}^{N} \alpha_j \langle X_{k-j}, X_{k-i} \rangle = \langle A_k, X_{k-i} \rangle$ avec $\langle X_{k-j}, X_{k-i} \rangle = \Gamma_X(j-i)$ (paire) et avec $\langle A_k, X_{k-i} \rangle = \Gamma_{AX}(i)$ (paire). Ce qui s'exprime encore sous forme matricielle $\left(E\left(X_j X_i\right)\right) \times \left(\alpha_j\right) = \left(E\left(AX_i\right)\right)$. La matrice du système est symétrique définie positive, par conséquent elle est inversible et on va pouvoir calculer les α_j et déterminer $\tilde{A}_k = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j X_{k-j}$.

Le filtre de *Wiener* est défini par $h_i = \begin{cases} \alpha_i, \forall i = 0 \ldots N \\ 0 \ si \ non \end{cases}$. Ce filtre est RIF, causal (car les α_j ne dépendent pas de *k*).

- **Filtre prédicteur de *Wiener***

Soit *X* un processus stationnaire. On cherche à prédire la valeur suivante, par conséquent on va poser $A_k = X_{k+1}$. On a $\Gamma_{AX}(i) = \Gamma_X(1+i)$.

Dans le cas où *X* = *B* (bruit blanc), tous les α_i sont nuls ! C'est normal, car les valeurs précédentes n'ont pas d'influence sur la valeur prédite, donc le plus prévisible est l'espérance du bruit soit 0.

- **Débruiteur**

Soit *X* le signal observé, tel que $X = A + B$. Estimer *A* (stationnaire) revient à supprimer le bruit B. On suppose que le signal et le bruit sont indépendants. On a $\Gamma_{AX}(i) = \Gamma_A(i)$ et $\Gamma_X(k) = \Gamma_A(k) + \Gamma_B(k)$ (donc *X* est stationnaire).