SESSION 2002

**Filière MP**

**MATHÉMATIQUES**

(Épreuve commune aux ENS de Paris et Cachan)

Durée : 4 heures

*L'usage de calculatrices de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.*

**Notations.** On note l'ensemble des nombres réels par $\mathbb{R}$, l'ensemble des réels positifs par $\mathbb{R}_+$, l'ensemble des nombres complexes par $\mathbb{C}$, l'ensemble des entiers relatifs par $\mathbb{Z}$, des entiers positifs par $\mathbb{N}$ et des entiers strictement positifs par $\mathbb{N}^*$. Pour toute fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et tout réel $a$, on note $f(\cdot + a)$ la fonction $g$ définie pour tout réel $t$ par $g(t) = f(t+a)$. On note $\overline{f}$ la fonction conjuguée de $f$ définie pour tout réel $t$ par $\overline{f}(t) = \overline{f(t)}$.

On désigne par $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et par $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout $f$ de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ on note $\|f\|$ le nombre $\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$. On dit qu'une suite de fonctions $(f_p;\, p \geq 1)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ *converge uniformément* sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $f$ si et seulement si $\lim_{p\to\infty} \|f_p - f\| = 0$. On rappelle que $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ muni de la norme $\|\cdot\|$ est un espace vectoriel normé complet.

On rappelle la définition de l'uniforme continuité : on dit qu'une fonction $F$ de $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) dans $\mathbb{C}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists \delta > 0 \ , \quad \forall t, s \in \mathbb{R} \text{ (resp. } \mathbb{C}) \ , \quad |t - s| \leq \delta \Longrightarrow |F(t) - F(s)| < \epsilon \ .$$

En particulier si $f$ est un élément de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $f$ est uniformément continue si et seulement si :

$$\lim_{h\to 0} \|f(\cdot + h) - f\| = 0 \ .$$

Soit $f$ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On dit que le réel $r$ est une période de $f$ si $r$ est non-nul et si pour tout réel $t$, on a $f(t+r) = f(t)$. On note $\mathcal{A}_r$ l'ensemble des fonctions de $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ admettant $r$ pour période et on note $\mathcal{A}$ la réunion des ensembles $\mathcal{A}_r$, $r$ parcourant l'ensemble des réels non-nuls. $\mathcal{A}$ est l'ensemble des fonctions périodiques de $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a \leq b$. Soit $I$ un intervalle d'extrémités $a$ et $b$. On définit la longueur de $I$ que l'on note $\ell(I)$ comme le nombre $b - a$. Pour tout intervalle borné non-vide $I$ on définit $d(I) = \sup_{x\in I} |x|$. On admet que :

$$d(I) \geq \frac{1}{2}\ell(I) \ .$$

Soit $r$ un réel non-nul et soit $g$ un élément de $\mathcal{A}_r$. On rappelle que pour tout réel $T$ :

$$\int_{T-r/2}^{T+r/2} g(t)dt = \int_{-r/2}^{r/2} g(t)dt \ .$$

Pour tout réel $\lambda$, on désigne par $e_\lambda$ la fonction de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ définie pour tout réel $t$ par $e_\lambda(t) = \exp(i\lambda t)$. Pour tout réel $r > 0$, tout $g$ de $\mathcal{A}_r$ et tout $k$ de $\mathbb{Z}$, on définit le $k$-ième coefficient de Fourier de $g$ par :

$$c_k(g) = \frac{1}{r}\int_{-r/2}^{r/2} g(t) e_{\frac{2\pi k}{r}}(-t)dt \ .$$

On rappelle la formule de Parseval :

$$\forall g \in \mathcal{A}_r \ , \qquad \frac{1}{r}\int_{-r/2}^{r/2} |g(t)|^2 dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(g)|^2 \tag{i}$$

**Question préliminaire 1** Montrer que la fonction $e_1 + e_{\sqrt{2}}$ n'est pas dans $\mathcal{A}$.

Soit $E$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que $E$ est *bien réparti* si et seulement si il existe un réel $l > 0$ tel que tout intervalle de longueur $l$ contient un élément de $E$.

Soient $f$ dans $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\epsilon > 0$. On dit qu'un réel $r$ est une *$\epsilon$-quasi période* de $f$ si $r$ est non-nul et si :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t+r) - f(t)| \leq \epsilon \ .$$

On note $E(f, \epsilon)$ l'ensemble des $\epsilon$-quasi périodes de $f$ (il est possible que cet ensemble soit vide). On dit qu'une fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est une *fonction presque périodique* si et seulement si $f$ est un élément de $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $E(f, \epsilon)$ est bien réparti pour tout $\epsilon > 0$. On désigne par $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions presques périodiques.

**Question préliminaire 2** Montrer que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

## PARTIE I

**1** Soit $f$ dans $\mathcal{B}$. Il existe donc un réel $l > 0$ tel que tout intervalle de longueur $l$ contient un élément de $E(f, 1)$. Montrer que pour tout $k$ dans $\mathbb{Z}$ :

$$\sup_{t \in [kl, (k+1)l]} |f(t)| \leq 1 + \sup_{t \in [-l, l]} |f(t)| \ .$$

En déduire que toute fonction presque périodique est dans $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

**2-a** Montrer que si $f$ est dans $\mathcal{B}$ alors $\overline{f}$, $f^2$ et $|f|^2$ le sont également.

**2-b** Soit $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uniformément continue. Montrer que $F \circ f$ est dans $\mathcal{B}$ dès que $f$ l'est.

**3** Soit $(f_n;\, n \geq 1)$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}$ qui convergent uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $f$. Montrer que pour tout réel $a$ et tout $n$ dans $\mathbb{N}$ :

$$\|f(\cdot + a) - f\| \leq 2\|f_n - f\| + \|f_n(\cdot + a) - f_n\| \ .$$

En déduire que $f$ est dans $\mathcal{B}$.

**4** Soit $f$ dans $\mathcal{B}$. Soient $h$ et $\epsilon$ deux réels strictement positifs. Soit $a$ dans $E(f, \epsilon)$. Montrer que pour tout réel $t$ on a :

$$|f(t+h) - f(t)| \leq 2\epsilon + |f(t - a + h) - f(t - a)| \ .$$

En déduire que toute fonction presque périodique est uniformément continue.

On dit qu'une fonction $f$ de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est *normale* si et seulement si de toute suite de réels $(a_n;\, n \geq 1)$ on peut extraire une sous-suite $(a_{n_j};\, j \geq 1)$ telle que la suite de fonctions $(f(\cdot + a_{n_j});\, j \geq 1)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des fonctions normales. Le but des questions **5** et **6** est de montrer que $\mathcal{B} = \mathcal{N}$.

**5** On cherche tout d'abord à montrer que $\mathcal{B} \subset \mathcal{N}$. On fixe $f$ dans $\mathcal{B}$ et $(a_n;\, n \geq 1)$, une suite réelle.

**5-a** Soit $\epsilon$ un réel strictement positif. Il existe $l > 0$ tel que tout intervalle de longueur $l$ contient un élément de $E(f, \epsilon/3)$. Montrer qu'il existe une suite $(b_n;\, n \geq 1)$ à valeurs dans $[0, l]$ telle que d'une part :

$$a_n - b_n \in E(f, \epsilon/3) \ ,$$

et d'autre part :

$$\forall m, n \geq 1 \ , \quad \|f(\cdot + a_n) - f(\cdot + a_m)\| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \|f - f(\cdot + b_n - b_m)\| \ .$$

**5-b** Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une sous-suite $(a_{n_j};\ j \geq 1)$ (dépendant de $\epsilon$) telle que

$$\forall i, j \geq 1\ , \quad \|f(\cdot + a_{n_j}) - f(\cdot + a_{n_i})\| \leq \epsilon\ .$$

(Indication : penser à extraire de $(b_n;\ n \geq 1)$ une sous-suite convergente et à utiliser l'uniforme continuité de $f$.)

**5-c** Montrer par récurrence qu'il existe une famille de suites strictement croissantes d'indices $(n_j^{(p)};\ j \geq 1)$, $p \in \mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall p \geq 1\ , \quad \{n_j^{(p+1)};\ j \geq 1\} \subset \{n_j^{(p)};\ j \geq 1\}$$

et

$$\forall p, i, j \geq 1\ , \quad \|f(\cdot + a_{n_j^{(p)}}) - f(\cdot + a_{n_i^{(p)}})\| \leq \frac{1}{p}\ .$$

En déduire que $\mathcal{B} \subset \mathcal{N}$ (considérer la suite $(a_{n_p^{(p)}};\ p \geq 1)$).

**6** On cherche ensuite à montrer que $\mathcal{N} \subset \mathcal{B}$. Pour cela, on raisonne par l'absurde : supposons qu'il existe $f$, un élément de $\mathcal{N}$ qui ne soit pas dans $\mathcal{B}$.

**6-a** Montrer qu'il existe un réel $\epsilon_0 > 0$ et une suite d'intervalles bornés $(I_n;\ n \geq 1)$ tels que $\ell(I_1) \geq 1$ et pour tout $n \geq 1$ :
- $I_n$ est inclus dans le complémentaire de $E(f, \epsilon_0)$ ;
- $\ell(I_{n+1}) > 5(d(I_1) + \ldots + d(I_n))$ .

(On rappelle que pour tout intervalle borné $I$, on a posé $d(I) = \sup_{x \in I} |x|$.)

**6-b** Montrer qu'il existe une suite de réels $(\alpha_n;\ n \geq 1)$ telle que $\alpha_1 \in I_1$ et pour tout $n \geq 1$ :
- $\alpha_{n+1}$ est dans $I_{n+1}$ mais pas dans $I_1 \cup \ldots \cup I_n$ ;
- l'intervalle fermé de longueur $2(d(I_1) + \ldots + d(I_n))$ centré en $\alpha_{n+1}$ est inclus dans $I_{n+1}$ .

**6-c** Montrer que pour tous $i, j$ entiers distincts plus grands que 1, $\alpha_i \neq \alpha_j$ et

$$\alpha_i - \alpha_j \notin E(f, \epsilon_0)\ .$$

Conclure.

**7-a** Montrer que si $f$ et $g$ sont dans $\mathcal{B}$ alors $fg$ et $f + g$ le sont également (utiliser le fait que $\mathcal{N} = \mathcal{B}$).

**7-b** On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions de la forme $a_1 e_{\lambda_1} + a_2 e_{\lambda_2} + \ldots + a_n e_{\lambda_n}$, pour $n$ variant dans $\mathbb{N}^*$, $a_1, a_2, \ldots a_n$ dans $\mathbb{C}$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$.

**8-a** Soit $(a_n;\ n \geq 1)$ une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que $\sum_{n \geq 1} |a_n| < \infty$. Montrer que la série de fonctions $g = \sum_{n \geq 1} a_n e_{1/n}$ est bien définie et appartient à $\mathcal{B}$.

**8-b** Montrer que :

$$\forall n \geq 1\ , \quad \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} g(t) e_{1/n}(-t) dt = a_n\ .$$

(Justifier soigneusement la réponse.)

**8-c** Montrer ensuite que $g$ est périodique si et seulement si la suite $(a_n;\ n \geq 1)$ est nulle à partir d'une certain rang.

Dans les parties II et III, on admet que l'ensemble $\mathcal{C}$ est dense dans $\mathcal{B}$ pour la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que :

$$\forall f \in \mathcal{B},\ \forall \epsilon > 0,\ \exists P \in \mathcal{C} : \quad \|f - P\| \leq \epsilon\ . \tag{ii}$$

## PARTIE II

Dans cette partie on utilise (ii) pour donner une caractérisation nécessaire des fonctions qui s'obtiennent comme limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de fonctions périodiques continues. Pour tout réel $\lambda$, toute fonction $f$ de $\mathcal{B}$ et tout réel $T > 0$, on pose :

$$a(f, \lambda, T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t) e_\lambda(-t) dt \ .$$

**1-a** Montrer que pour tout $P$ de $\mathcal{C}$ et tout réel $\lambda$, $\lim_{T\to\infty} a(P, \lambda, T)$ existe.

**1-b** Montrer que pour tout réel $\lambda$ et tout élément $f$ de $\mathcal{B}$, $\lim_{T\to\infty} a(f, \lambda, T)$ existe. On note $a(f, \lambda)$ cette limite et on définit le *spectre de* $f$, noté $\mathrm{Spec}(f)$, par :

$$\mathrm{Spec}(f) = \{\lambda \in \mathbb{R} : a(f, \lambda) \neq 0\} \ .$$

**1-c** Soit $P$ un élément de $\mathcal{C}$. Calculer explicitement $\mathrm{Spec}(P)$ et $a(P, \lambda)$ pour tout réel $\lambda$.

**1-d** Soit $(f_n; n \geq 1)$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}$ qui converge uniformément vers $f$. Montrer que pour tout réel $\lambda$ :

$$\lim_{n\to\infty} a(f_n, \lambda) = a(f, \lambda) \ .$$

**2** Soit $f$ dans $\mathcal{B}$ et $P_k = \sum_{m=1}^{n_k} a_m^{(k)} e_{\ell_m^{(k)}}$ , $k \geq 1$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}$ telle que $\|f - P_k\| \leq 1/k$.

**2-a** Montrer que si $\lambda$ n'est pas dans $\{\ell_m^{(k)};\ k \geq 1;\ n_k \geq m \geq 1\}$, alors $a(P_k, \lambda) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

**2-b** Montrer que $\mathrm{Spec}(f)$ est au plus dénombrable.

**3-a** Soient $r$ un réel non-nul et $g$ un élément de $\mathcal{A}_r$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Q_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k(g) e_{2\pi k/r}$. Montrer que pour tout réel $\lambda$ on a :

$$|a(Q_n, \lambda) - a(g, \lambda)| \leq \left( \sum_{|k|>n} |c_k(g)|^2 \right)^{1/2} \ .$$

**3-b** En déduire $\mathrm{Spec}(g)$ (une justification soigneuse est demandée).

**4** Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle qu'il existe une suite $(f_p;\ p \geq 1)$ d'éléments de $\mathcal{A}$ satisfaisant :

$$\lim_{p\to\infty} \|f - f_p\| = 0 \ .$$

**4-a** Montrer que les éléments de $\mathrm{Spec}(f)$ sont tous des multiples rationnels d'un même réel.

**4-b** On suppose que $\mathrm{Spec}(f)$ contient un élément non-nul. Il existe une suite $(r_p;\ p \geq 1)$ de réels non-nuls telle que $f_p \in \mathcal{A}_{r_p}$ , pour tout $p \geq 1$. Montrer qu'il existe un certain rang $p_0$ tel que les périodes $r_p$ , $p \geq p_0$ sont toutes des multiples rationnels d'un même réel.

**4-c** Donner un exemple simple de fonction presque périodique qui n'est pas limite uniforme de fonctions périodiques continues.

## PARTIE III

Soit $f$ un élément de $\mathcal{B}$. D'après II-2-b, Spec$(f)$ est au plus dénombrable. Si Spec$(f)$ est infini, on en fixe une énumération notée $(\lambda_n;\ n \geq 1)$ et on pose :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)} |a(f,\lambda)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a(f,\lambda_n)|^2 \ ,$$

(cette expression pouvant prendre éventuellement la valeur $+\infty$). Si Spec$(f)$ est vide, on pose

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)} |a(f,\lambda)|^2 = 0 \ .$$

Si Spec$(f)$ est fini, la somme $\sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)} |a(f,\lambda)|^2$ est définie sans ambiguité. Le but de cette partie est de généraliser la formule de Parseval aux fonctions presques périodiques. Plus précisément, on se propose de montrer le résultat suivant :

$$\forall f \in \mathcal{B}\ , \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(t)|^2 dt = \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)} |a(f,\lambda)|^2 \ . \tag{iii}$$

**1** Soit $f \in \mathcal{B}$. Justifier l'existence de

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(t)|^2 dt \ .$$

Montrer que tout élément de $\mathcal{A}$ satisfait (iii).

**2-a** Soient $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, $n$ réels distincts. On note $\mathcal{C}_{\tau_1,\ldots,\tau_n}$ l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{C}$ de $e_{\tau_1}, \ldots, e_{\tau_n}$. Soit $P = \sum_{k=1}^{n} b_k e_{\tau_k}$ un élément de $\mathcal{C}_{\tau_1,\ldots,\tau_n}$. Montrer que $a(|f-P|^2, 0)$ est bien défini et que :

$$a(|f-P|^2,0) = a(|f|^2,0) - \sum_{k=1}^{n} |a(f,\tau_k)|^2 + \sum_{k=1}^{n} |b_k - a(f,\tau_k)|^2 \ .$$

En déduire que $\inf\{a(|f-P|^2,0);\ P \in \mathcal{C}_{\tau_1,\ldots,\tau_n}\}$ est atteint en un unique élément de $\mathcal{C}_{\tau_1,\ldots,\tau_n}$ à préciser.

**2-b** Montrer que :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)} |a(f,\lambda)|^2 \leq a(|f|^2,0) \ .$$

**2-c** Soit $(P_k;\ k \geq 1)$ la suite d'éléments de $\mathcal{C}$ considérée à la question II-2 : d'après II-2-a et II-2-b, on sait que Spec$(f)$ est inclus dans $\{\ell_m^{(k)};\ k \geq 1;\ n_k \geq m \geq 1\}$. En déduire que :

$$\forall k \geq 1\ ,\ \exists S_k \text{ fini } \subset \mathrm{Spec}(f) : \quad \sum_{\lambda \in S_k} |a(f,\lambda)|^2 \geq a(|f|^2,0) - \frac{1}{k^2} \ .$$

En déduire l'assertion (iii).

**3-a** Soit $f$ une fonction presque périodique à valeurs réelles positives. On suppose qu'elle est non-nulle. Il existe alors un réel $x_0$ et $\delta$ un réel strictement positif, tels que :

$$\inf_{y \in ]x_0-\delta, x_0+\delta[} f(y) = c > 0 \ .$$

On introduit un réel $l$ tel que tout intervalle de longueur $l$ contient au moins un élément de $E(f, c/2)$. On peut supposer sans restriction que $l \geq 2\delta$. Montrer que tout intervalle $I$ de longueur supérieure à $l$ contient un intervalle $J$ de longueur $\delta$ tel que :

$$\inf_{y \in J} f(y) \geq c/2 \ .$$

**3-b** Déduire de la question précédente que $a(f,0) > 0$.

**3-c** Montrer que :

$$\forall g_1, g_2 \in \mathcal{B} \ , \qquad (\forall \lambda \in \mathbb{R} \ , \ a(g_1,\lambda) = a(g_2,\lambda)) \Longrightarrow g_1 = g_2 \ .$$

**3-d** Soit $f$ dans $\mathcal{B}$. Soit $(\lambda_n;\, n \geq 1)$ une énumération de $\mathrm{Spec}(f)$. On suppose que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a(f,\lambda_n)| < \infty \ .$$

Prouver que pour tout réel $t$,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a(f,\lambda_n) e_{\lambda_n}(t) \ .$$