SESSION 2002

Filière MP

MATHÉMATIQUES

(Épreuve commune aux ENS de Paris et Lyon)

Durée : 6 heures

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Ce problème est consacré à certaines propriétés énumératives d'objets combinatoires, d'une part les permutations, d'autre part les arbres.

On sera particulièrement attentif à la clarté, la précision et la concision de la rédaction. Les candidats pourront utiliser les résultats des questions non traitées.

Les parties 1, 2 et 3 sont largement indépendantes. La partie 4 utilise les résultats de la partie 3.

On notera $\mathbf{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels et $\mathbf{C}$ celui des nombres complexes.

1. Formule de Lagrange

Cette partie est consacrée à la démonstration de la formule d'inversion de Lagrange (question 1.11).

Une série de Laurent formelle à coefficients dans $\mathbf{C}$ est une fonction de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{C}$ telle qu'il existe $N \in \mathbf{Z}$ pour lequel $f(n) = 0$ si $n \leq N$. On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des séries de Laurent formelles à coefficients dans $\mathbf{C}$. Soient f et $g \in \mathcal{L}$, on définit leur somme par $(f+g)(n) = f(n)+g(n)$ et leur produit par la formule $(f \cdot g)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)g(n-k)$. Si $\lambda \in \mathbf{C}$ on définit $\lambda f \in \mathcal{L}$ par $(\lambda f)(n) = \lambda f(n)$.

1.1 Vérifier que le produit « $\cdot$ » est bien défini, qu'il admet un élément neutre, et que $\mathcal{L}$ est une $\mathbf{C}$-algèbre.

On note f^k les puissances d'un élément $f \in \mathcal{L}$ pour le produit « $\cdot$ ».
Soit $(f_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ une famille de séries de Laurent formelles telle que
(i) il existe N tel que $f_k(n) = 0$ pour tout k et tout $n \leq N$,
(ii) pour tout n on a $f_k(n) = 0$ sauf pour un nombre fini de k.

1.2 Montrer que la formule $f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(n)$ définit une série de Laurent formelle.
On note $\sum_{k=-\infty}^{\infty}$ la série ci-dessus.

1.3 Soit t la série de Laurent formelle telle que $t(n) = 0$ si $n \neq 1$ et $t(1) = 1$. Montrer que t est inversible dans $\mathcal{L}$, et que pour toute $f \in \mathcal{L}$ on a $f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)t^k$.

1.4 Soit u une série de Laurent formelle telle que $u(n) = 0$ si $n \leq 0$, montrer que $1-u$ est inversible et que $(1-u)^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} u^k$.

1.5 Montrer que l'addition et le produit définissent une structure de corps commutatif sur $\mathcal{L}$.

1.6 Soient f et u deux séries de Laurent formelles telles que $u(n) = 0$ si $n < 0$, et u n'est pas identiquement nulle. Montrer que la série de Laurent formelle $f \circ u = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)u^k$ est bien définie.

1.7 Soient f, g, u des séries de Laurent formelles vérifiant $f(n) = g(n) = u(n) = 0$ pour $n \leq -1$, et $u(0) = 0$. On suppose que les séries entières $F(z) = \sum f(n)z^n$, $G(z) = \sum g(n)z^n$ et $U(z) = \sum u(n)z^n$ ont des rayons de convergence non nuls. Montrer que les séries entières $\sum(f \cdot g)(n)z^n$ et $\sum(f \circ u)(n)z^n$ ont des rayons de convergence non nuls, et valent, dans un voisinage de zéro, $F(z)G(z)$ et $F(U(z))$ respectivement.

1.8 Montrer que les séries de Laurent formelles u telles que $u(n) = 0$ pour $n \leq 0$ et $u(1) \neq 0$ forment un groupe pour la loi de composition $\circ$.

On notera ce groupe $\mathcal{G}$, et $u^{\langle -1\rangle}$ l'inverse dans $\mathcal{G}$ d'un élément u de $\mathcal{G}$.

Soit $f \in \mathcal{L}$, on définit sa dérivée $f' \in \mathcal{L}$ par la formule $f'(n) = (n+1)f(n+1)$.

1.9 Soit $f \in \mathcal{L}$, $f \neq 0$, montrer que pour tout $n \in \mathbf{Z}$ on a $(f^n)' = nf' \cdot f^{n-1}$.

1.10 Montrer que pour tout $u \in \mathcal{G}$ et toute $f \in \mathcal{L}$ on a $f(-1) = (u' \cdot (f \circ u))(-1)$.

1.11 Soit $u \in \mathcal{G}$, montrer que pour tout $k \geq 1$ on a $u^{\langle -1 \rangle}(k) = \frac{1}{k} u^{-k}(-1)$.

1.12 En utilisant 1.11 calculer l'inverse, pour la loi de composition $\circ$, de la série de Laurent formelle $te^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+1}$. Quel est le rayon de convergence de la série entière associée à cet inverse ?

2. Permutations

Soit n un entier ≥ 1, on considère le groupe Σ_n des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. On notera e la permutation identique qui est l'élément neutre de Σ_n.

Soit $\sigma \in \Sigma_n$, on rappelle que les orbites de σ sont les sous-ensembles de $\{1, \ldots, n\}$ de la forme $\{\sigma^k(s); k \in \mathbf{Z}\}$, où s parcourt $\{1, \ldots, n\}$, et qu'elles forment une partition de $\{1, \ldots, n\}$. On note $O(\sigma)$ le nombre d'orbites de σ. Pour $\sigma \neq e$ on note $|\sigma|$ le plus petit nombre k tel que σ puisse s'écrire comme le produit de k transpositions, et on pose $|e| = 0$.

2.1 Soit $\tau = (ij)$ la transposition qui échange i et j. Déterminer $O(\sigma\tau)$ en fonction de $O(\sigma)$, suivant que i et j sont dans la même orbite de σ ou non.

2.2 Soient σ_1 et σ_2 deux permutations de $\{1, \ldots, n\}$, montrer que $|\sigma_1\sigma_2| \leq |\sigma_1| + |\sigma_2|$.

2.3 Montrer que $|\sigma| = n - O(\sigma)$.

2.4 Soient σ_1 et σ_2 deux permutations de $\{1, \ldots, n\}$. Montrer que si $|\sigma_1| + |\sigma_1^{-1}\sigma_2| = |\sigma_2|$ alors toute orbite de σ_1 est incluse dans une orbite de σ_2.

Soit $c \in \Sigma_n$ une permutation circulaire d'ordre n, i.e une permutation ayant une seule orbite. Pour $n \geq 2$ on note w_n le nombre de décompositions de c en un produit de $n-1$ transpositions, et on pose $w_1 = 1$.

2.5 Vérifier que w_n ne dépend pas de la permutation circulaire choisie, et montrer que les nombres w_n satisfont la relation de récurrence

$$w_n = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{k!(n-k-2)!} w_{k+1} w_{n-k-1} \qquad (n \geq 2).$$

On pourra étudier les décompositions en produit de $n-2$ transpositions de $(ij)c$ en utilisant 2.4.

2.6 On considère la série de Laurent formelle $w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{(n-1)!} t^n$. Déduire de 2.5 une relation entre w et w'.

2.7 En utilisant 1.12, déduire de 2.6 que $w_n = n^{n-2}$.

3. Arbres

Le résultat principal de cette partie est le Théorème de Kirchhoff (question 3.11). On l'utilise ensuite pour retrouver par une autre méthode le résultat final de la partie 2.

On appelle graphe un couple $G = (S, A)$ où S est un ensemble fini, dont les éléments sont appelés les sommets du graphe, et A un ensemble de parties à deux éléments de S, appelées les arêtes du graphe.

Un graphe est dit connexe si pour tout couple de sommets (a, b) dans S il existe un entier $k \geq 1$ et une suite de sommets $s_1, \ldots s_k$ telle que $a = s_1$, $b = s_k$ et $\{s_i, s_{i+1}\}$ est une arête pour tout $i \in \{1, \ldots, k-1\}$.

Un circuit de longueur k de G est une suite de sommets $s_1, \ldots, s_k$, tous distincts, telle que $\{s_i, s_{i+1}\}$ pour $i = 1, \ldots, k-1$, et $\{s_k, s_1\}$ soient des arêtes de G.

3.1 Soit G un graphe connexe à n sommets ($n \geq 2$), montrer que G a au moins $n-1$ arêtes.

3.2 Soit G un graphe sans circuit de longueur ≥ 3, ayant au moins une arête, montrer qu'il existe un sommet de G appartenant à une seule arête.

3.3 Soit G un graphe connexe à n sommets, montrer que les conditions suivantes sont équivalentes

(i) G n'a pas de cicuit de longueur ≥ 3.

(ii) G a $n-1$ arêtes.

Un graphe connexe satisfaisant l'une des deux conditions équivalentes ci-dessus sera appelé un arbre.

3.4 Montrer que pour tout arbre d'ensemble de sommets S et tout sommet $s \in S$ il existe une unique application $\varphi : S \setminus \{s\} \to S$ telle que l'ensemble des arêtes de l'arbre soit $\{\{u, \varphi(u)\}; u \in S \setminus \{s\}\}$.

Soit M une matrice de taille $n \times n$, avec $n \geq 2$, à coefficients dans $\mathbf{R}$. On note M^{ii}, pour $i \in \{1, \dots, n\}$, la matrice obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ et la $i^{\text{ème}}$ colonne de M.

3.5 Soit $P(\lambda) = \text{dét}(M - \lambda I)$ le polynôme caractéristique de M, montrer que $P'(0) = -\sum_{i=1}^{n} \text{dét}(M^{ii})$.

On suppose maintenant que M est symétrique et que ses coefficients vérifient :

$$\text{pour tout } i \in \{1, \dots, n\}, \text{ on a } \sum_{j=1}^{n} M_{ij} = 0 \tag{$*$}$$

3.6 Montrer que 0 est valeur propre de M.

3.7 Montrer que $\text{dét}(M^{ii})$ ne dépend pas de i.

3.8 Exprimer $\text{dét}(M^{ii})$ en fonction des valeurs propres de M.

On note $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des applications de $\{1, \dots, n-1\}$ dans $\{1, \dots, n\}$. Soit $\varphi \in \mathcal{F}_n$, on note E_φ l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ tel que $E_\varphi(e_j) = e_{\varphi(j)}$ pour tout $j \in \{1, \dots, n-1\}$ et $E_\varphi(e_n) = 0$, où $(e_j)_{1 \leq j \leq n}$ désigne la base canonique de $\mathbf{C}^n$.

3.9 Montrer que $\text{dét}(M^{nn}) = -\sum_{\varphi \in \mathcal{F}_n} \prod_{j=1}^{n-1} M_{j\varphi(j)} \, \text{dét}(E_\varphi - I)$.

3.10 Montrer que s'il existe $k \geq 1$ et $a_1, \dots, a_k \in \{1, \dots, n-1\}$ tels que $\varphi(a_j) = a_{j+1}$ pour $j = 1, \dots, k$, et $\varphi(a_k) = a_1$, alors $\text{dét}(E_\varphi - I) = 0$. Montrer que dans le cas contraire la puissance $n^{\text{ème}}$ de E_φ est nulle, et que $\{\{i, \varphi(i)\}; i \in \{1, \dots, n-1\}\}$ est l'ensemble des arêtes d'un arbre d'ensemble de sommets $\{1, \dots, n\}$. Que vaut $\text{dét}(E_\varphi - I)$ dans ce cas ?

On note T_n l'ensemble des arbres dont l'ensemble des sommets est $\{1, \dots, n\}$.

3.11 Déduire des questions 3.4, 3.9 et 3.10 l'identité

$$\text{dét}(M^{nn}) = (-1)^{n-1} \sum_{(S,A) \in T_n} \prod_{\{i,j\} \in A} M_{ij}.$$

3.12 En utilisant 3.8 et 3.11, calculer le nombre d'éléments de T_n.

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des n-uplets $(c, \tau_1, \dots, \tau_{n-1})$ où c est une permutation circulaire d'ordre n dans Σ_n, et $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$ sont des transpositions satisfaisant $c = \tau_1 \dots \tau_{n-1}$.
Soit Ω l'ensemble des couples $((S, A), \omega)$ où (S, A) est un arbre de sommets $S = \{1, \dots, n\}$ et $\omega = (a_1, \dots, a_{n-1})$ est une énumération de l'ensemble des arêtes de (S, A). Pour chaque partie à deux éléments $\{i, j\} \subset S$ on note $\tau(\{i, j\})$ la transposition (ij).

3.13 Montrer que l'application qui à tout $((S, A), (a_1, \dots, a_{n-1})) \in \Omega$ associe

$$(\tau(a_1) \dots \tau(a_{n-1}), \tau(a_1), \dots, \tau(a_{n-1}))$$

est une bijection entre Ω et $\mathcal{F}$.

3.14 En utilisant 3.12 et 3.13, retrouver le résultat de la question 2.7.

4. Dénombrement d'arbres couvrants

On reprend les notations de la partie 3.

On considère le cube de $\mathbf{R}^3$ dont les sommets sont les points de coordonnées (x_1, x_2, x_3) vérifiant $x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = 1$. Soit $G = (S, A)$ le graphe dont les sommets sont les sommets du cube et les arêtes sont les paires de sommets dont la distance mutuelle est 2, pour la distance usuelle de $\mathbf{R}^3$. On notera $s_1, \ldots, s_8$ les sommets du cube.

Soit V un espace vectoriel réel de dimension 8, dont on choisit une base $(e_{s_j}; j = 1, \ldots, 8)$ indexée par les sommets du cube. On note γ_i, pour $i = 1, 2, 3$ la symétrie orthogonale de $\mathbf{R}^3$ par rapport au plan d'équation $x_i = 0$. Soit ε_i l'endomorphisme de V tel que $\varepsilon_i(e_{s_k}) = e_{\gamma_i(s_k)}$ pour $k = 1, \ldots, 8$.

4.1 Vérifier que les endomorphismes ε_1, ε_2 et ε_3 commutent et déterminer une base formée de vecteurs propres communs à ces endomorphismes.

Soit M la matrice de taille 8×8 telle que

(i) $M_{ij} = 1$ si $i \neq j$, et si les sommets s_i et s_j sont sur une même arête du cube,
(ii) $M_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et les sommets s_i et s_j ne sont pas sur une même arête du cube,
(iii) M vérifie la condition $(*)$ précédant 3.6.

4.2 Exprimer la matrice M à l'aide des matrices des endomorphismes ε_1, ε_2 et ε_3 dans la base $(e_{s_j})_{1 \leq j \leq 8}$.

4.3 En utilisant les questions 3.8 et 3.11, déterminer le nombre d'arbres d'ensemble de sommets S, dont les arêtes sont dans A. Cas arbres sont appelés les arbres couvrants du cube.

4.4 Quel est le nombre d'arbres couvrants pour un cube de dimension n ?