

# POLYNOMES

## ☐ Opérations de base

☐ Les polynômes (à une ou plusieurs variables) sont une des structures de base des logiciels de calcul formel. Les opérations fondamentales sont le développement

> **P:=expand( (x^2+x+1)^3\*(x-a)^2 );**

$P := x^8 - 2x^7a + x^6a^2 + 3x^7 - 6x^6a + 3x^5a^2 + 6x^6 - 12x^5a + 6x^4a^2 + 7x^5 - 14x^4a + 7x^3a^2 + 6x^4 - 12x^3a + 6x^2a^2 + 3x^3 - 6x^2a + 3xa^2 + x^2 - 2xa + a^2$

☐ et les deux opérations inverses que sont le regroupement de termes ou la factorisation

> **collect(P,x);**

$x^8 + (-2a + 3)x^7 + (-6a + a^2 + 6)x^6 + (7 + 3a^2 - 12a)x^5 + (6a^2 - 14a + 6)x^4 + (-12a + 3 + 7a^2)x^3 + (6a^2 + 1 - 6a)x^2 + (3a^2 - 2a)x + a^2$

> **collect(P,a);**

$(6x^2 + 7x^3 + 6x^4 + 3x + 3x^5 + x^6 + 1)a^2 + (-12x^5 - 6x^6 - 2x^7 - 14x^4 - 2x - 6x^2 - 12x^3)a + x^8 + x^2 + 3x^3 + 3x^7 + 6x^4 + 7x^5 + 6x^6$

☐ Sous la forme regroupée, on peut rechercher les coefficients

> **coeff(collect(P,x),x,4);**

**coeff(collect(P,x),x,1);**

**coeff(collect(P,x),x,0);**

$6a^2 - 14a + 6$

$3a^2 - 2a$

$a^2$

☐ et aussi le degré

> **degree(collect(P,x),x);**

8

> **factor(P);**

$(x^2 + x + 1)^3 (a - x)^2$

☐ La factorisation s'effectue par défaut dans  $\mathbb{Q}[X]$ .

> **Q:=(X^2-2)^2: factor(Q);**

$(X^2 - 2)^2$

☐ Si vous voulez factoriser dans une extension, il faut l'indiquer (ici dans  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}](X)$ )

> **factor(Q,sqrt(2));**

$$(X + \sqrt{2})^2 (X - \sqrt{2})^2$$

Pour factoriser le polynôme  $X^2 + X + 1$ , il faut encore plus se fatiguer, en adjoignant au corps  $\mathbb{Q}$  les deux symboles  $\sqrt{3}$  et  $I = \sqrt{-1}$  :

> **factor(x^2+x+1,[sqrt(3),sqrt(-1)]);**

$$\frac{1}{4} (2x + 1 + I\sqrt{3}) (2x + 1 - I\sqrt{3})$$

La fonction **split** qu'il faut charger explicitement à partir de la librairie, peut rendre les mêmes services de façon plus simple. Cette fonction introduira en général dans sa solution des expressions de type  $\text{RootOf}(P(\_Z))$  où  $P$  est un polynôme, qui désignent n'importe quelle racine du polynôme en la variable  $\_Z$ ; on pourra ensuite convertir ces  $\text{RootOf}$  en radicaux.

> **readlib(split): split(X^2+X+1,X);**

$$(X - \text{RootOf}(\_Z^2 + \_Z + 1)) (X + 1 + \text{RootOf}(\_Z^2 + \_Z + 1))$$

> **convert(",radical);**

$$X + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{3} \quad X + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{3}$$

La fonction **allvalues** retourne la séquence des expressions trouvées en remplaçant les  $\text{RootOf}$  successivement par toutes les racines du (ou des) polynôme concerné.

> **split(X^4+1,X);**

$$(X - \text{RootOf}(\_Z^4 + 1))^3 (X + \text{RootOf}(\_Z^4 + 1))^3 (\text{RootOf}(\_Z^4 + 1) + X) (X - \text{RootOf}(\_Z^4 + 1))$$

> **allvalues(");**

$$\begin{aligned} & X - \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{2}^3 \quad X + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{2}^3 \quad \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{2} + X \quad X - \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{2} , \\ & X - -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{2}^3 \quad X + -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{2}^3 \quad X - \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{2} \quad \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{2} + X , \\ & X - \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{2}^3 \quad X + \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{2}^3 \quad \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{2} + X \quad X - \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{2} , \\ & X - -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{2}^3 \quad X + -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{2}^3 \quad X - \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{2} \quad \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{2} + X \end{aligned}$$

ce qui donne quatre factorisations, évidemment identiques à l'ordre près.

Si l'on désire (uniquement pour les polynômes à une variable) une factorisation en virgules flottante, on peut utiliser les options **real** ou **complex**.

> **factor(x^3+x+1,real);**

$$(x + .6823278038) (x^2 - .6823278038 x + 1.465571232)$$

> **factor(x^3+x+1,complex);**

$$(x + .6823278038) (x - .3411639019 + 1.161541400 I) (x - .3411639019 - 1.161541400 I)$$

└ Bien entendu, toutes les opérations algébriques (somme, différence, produit, puissance) sont directement accessibles.

## ▣ Polynômes à une variable

### ▣ Opérations algébriques

└ Bien entendu, toutes les opérations algébriques sur les polynômes (somme, différence, produit, puissance) sont directement accessibles.  
 └ Les opérations de base (à part le développement, le regroupement de termes, la recherche de coefficients, la factorisation) sont la division euclidienne, le pgcd et le ppcm.

└ > **P:=(x^2-2)^2\*(x^2+1)^3: Q:=(x^2-2)^2\*(x^2+x+1)^2:**

└ Le quotient de la division euclidienne

└ > **quo(P,Q,x);**

$$x^2 - 2x + 4$$

└ Le reste de la division euclidienne

└ > **rem(P,Q,x);**

$$-12 - 6x^6 + 21x^4 - 12x^2 - 4x^7 + 8x^3 - 24x + 10x^5$$

└ Le pgcd

└ > **gcd(P,Q);**

$$(x^2 - 2)^2$$

└ Le ppcm

└ > **lcm(P,Q);**

$$-15x^8 - 8x^7 + 4 + 6x^6 + 29x^4 + 24x^3 + 8x + 20x^2 - 7x^{10} + 2x^{13} + 2x^{12} + x^{14} - 12x^9 + 18x^5$$

└ que l'on va ordonner

└ > **sort("");**

$$x^{14} + 2x^{13} + 2x^{12} - 7x^{10} - 12x^9 - 15x^8 - 8x^7 + 6x^6 + 18x^5 + 29x^4 + 24x^3 + 20x^2 + 8x + 4$$

└ On peut même obtenir un couple de Bézout

└ > **gcdex(P,Q,x,'U','V');**

$$x^4 - 4x^2 + 4$$

└ > **U; V;**

$$\begin{aligned} &1 + 6x + 6x^2 + 4x^3 \\ &-6x - 10x^3 + 3x^2 - 4x^5 + 2x^4 \end{aligned}$$

└ > **expand(U\*P+V\*Q);**

$$x^4 - 4x^2 + 4$$

### ▣ Racines

La recherche des racines d'un polynôme se fait à l'aide de la fonction solve

> **solve(x^5+x+1,x);**

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{3}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{3}, -\frac{1}{6}\%2 - \frac{2}{3}\%1 + \frac{1}{3}, \frac{1}{12}\%2 + \frac{1}{3}\%1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}I\sqrt{3} - \frac{1}{6}\%2 + \frac{2}{3}\%1,$$

$$\frac{1}{12}\%2 + \frac{1}{3}\%1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}I\sqrt{3} - \frac{1}{6}\%2 + \frac{2}{3}\%1$$

$$\%1 := \frac{1}{(100 + 12\sqrt{69})^{1/3}}$$

$$\%2 := (100 + 12\sqrt{69})^{1/3}$$

Dans le cas où les mathématiques ne fournissent pas de formule explicite pour les racines, Maple introduit un nouveau symbole **RootOf** qui désigne n'importe quelle racine d'un polynôme

> **solve(x^6+x+1,x);**

$$\text{RootOf}(_Z^6 + _Z + 1)$$

La fonction **allvalues** permet de retrouver des valeurs (exactes si possibles, sinon approchées) d'un RootOf

> **allvalues("");**

$$-.7906671888 - .3005069203 I, -.7906671888 + .3005069203 I, -.1547351445 - 1.038380754 I, -.1547351445 + 1.038380754 I, .9454023333 - .6118366938 I, .9454023333 + .6118366938 I$$

Etant donné deux polynômes à une variable, on peut leur associer un nombre qui est leur résultant. Il est nul si et seulement si ces deux polynômes ont une racine commune dans un certain corps contenant le corps de base (C si les polynômes sont à coefficient dans Q).

Cherchons par exemple à quelle condition sur  $a, b, c, d$  les deux polynômes  $X^2 + aX + b$  et  $X^2 + cX + d$  ont une racine complexe en commun

> **resultant(x^2+a\*x+b,x^2+c\*x+d,x)=0;**

$$b^2 - 2bd + d^2 - cab - cad + c^2b + da^2 = 0$$

Le discriminant d'un polynôme est le résultant du polynôme et du polynôme dérivé; il est nul si et seulement si le polynôme a une racine multiple dans un corps contenant le corps de base

> **discrim(a\*x^2+b\*x+c,x);**

**discrim(x^3+p\*x+q,x);**

$$-4ca + b^2$$

$$-4p^3 - 27q^2$$

## Polynômes d'interpolation de Lagrange

La fonction **interp** associée à deux listes  $[x_1, x_2, x_3, ?]$  et  $[y_1, y_2, y_3, ?]$  construit le polynôme d'interpolation de Lagrange prenant les valeurs  $y_i$  aux points  $x_i$

```
> P:=interp([0,1,2],[a,b,c],x);
```

$$P := \frac{1}{2}c - b + \frac{1}{2}a x^2 + -\frac{1}{2}c + 2b - \frac{3}{2}a x + a$$

```
> subs(x=2,P);
```

c

## Polynômes à plusieurs variables

### Opérations de base

Beaucoup des opérations sur les polynômes à une variable s'étendent aux polynômes à plusieurs variables, dans la mesure où elles ont un sens

```
> P:=(a*x+y)^4-(x+a*y)^2;
```

```
> collect(P,[x,y]);
```

$$a^4 x^4 + 4 x^3 a^3 y + (-1 + 6 a^2 y^2) x^2 + (-2 a y + 4 y^3 a) x + y^4 - a^2 y^2$$

```
> factor("");
```

$$(y^2 - a y - x + 2 x a y + a^2 x^2) (y^2 + a y + x + 2 x a y + a^2 x^2)$$

### Résolution des équations polynomiales

Maple permet de résoudre des systèmes d'équations polynomiales

```
> solve({x+y=a,x^3+y^3=b},{x,y});
```

$$\{y = \text{RootOf}(3 a \_Z^2 - 3 \_Z a^2 + a^3 - b), x = -\text{RootOf}(3 a \_Z^2 - 3 \_Z a^2 + a^3 - b) + a\}$$

on peut obtenir les valeurs à l'aide de la fonction **allvalues** (on utilise l'option **dependent** pour indiquer à Maple qu'il doit considérer que les deux **RootOf** désignent la même racine)

```
> allvalues("",'dependent');
```

$$\{y = \frac{1}{6} \frac{3 a^2 + \%1}{a}, x = -\frac{1}{6} \frac{3 a^2 + \%1}{a} + a\}, \{y = \frac{1}{6} \frac{3 a^2 - \%1}{a}, x = -\frac{1}{6} \frac{3 a^2 - \%1}{a} + a\}$$

$$\%1 := \sqrt{-3 a^4 + 12 a b}$$

### Simplification moyennant des relations polynomiales

La fonction **simplify** permet de faire des simplifications en supposant que certaines relations sont vérifiées. C'est ainsi que en écrivant **simplify(expression, relations, variables)** où **expression** est une expression Maple, **variables** est une liste de variables à éliminer par ordre de priorité décroissante et **relations** une liste ou un ensemble de relations entre ces variables, Maple va simplifier l'expression en tenant compte des relations entre les variables et en tentant d'éliminer le plus possible de variables, dans l'ordre de priorité indiqué. Par exemple, pour

simplifier le polynôme  $x^4 + 2 y^5$  en tenant compte de  $s = x + y$  et  $p = x y$ , on écrira

```
> simplify(x^4+2*y^5,{s=x+y,p=x*y},[y,x,s,p]);
```

$$2s^5 - 2xs^4 + 6xps^2 - 2xp^2 - 2xsp - 8ps^3 + p^2 + 6p^2s - ps^2 + xs^3$$

On peut ainsi très facilement exprimer un polynôme symétrique en fonction des polynômes symétriques élémentaires

> `simplify(x^5+y^5,{s=x+y,p=x*y},[y,x,s,p]);`

$$s^5 - 5ps^3 + 5p^2s$$

> `simplify(x^3+y^3+z^3-3*x*y*z,[sigma[1]=x+y+z,sigma[2]=x*y+y*z+z*x,sigma[3]=x*y*z],[x,y,z,sigma[1],sigma[2],sigma[3]]);`

$$s_1^3 - 3s_1s_2$$

ou en fonction des polynômes de Newton  $X^k + Y^k + Z^k$

> `simplify(x*y*z,[s[1]=x+y+z,s[2]=x^2+y^2+z^2,s[3]=x^3+y^3+z^3],[x,y,z,s[1],s[2],s[3]]);`

$$\frac{1}{6}s_1^3 + \frac{1}{3}s_3 - \frac{1}{2}s_2s_1$$

# Cours de mathématiques

par Denis Monasse

Ed. Vuibert

## Table des matières

- Plan général
- Algèbre générale
- Algèbre linéaire
- Réduction des endomorphismes
- Topologie des espaces métriques
- Espaces vectoriels normés
- Comparaison des fonctions
- Suites et séries numériques
- Fonctions d'une variable réelle
- Intégration
- Suites et séries de fonctions

- Séries entières
- Formes quadratiques
- Formes hermitiennes
- Séries de Fourier
- Calcul différentiel
- Equations différentielles
- Espaces affines
- Courbes
- Surfaces
- Intégrales multiples
- Index