

Intégration

Primitives

Primitives

Maple sait calculer beaucoup de primitives de fonctions usuelles grâce à l'algorithme de Risch.

> `int(1/(x^4+1),x);`

$$\frac{1}{8}\sqrt{2} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{4}\sqrt{2} \arctan(x\sqrt{2} + 1) + \frac{1}{4}\sqrt{2} \arctan(x\sqrt{2} - 1)$$

> `assume(a,real); int(1/(1+cos(a)*cos(x)),x);`

$$\frac{(-1 + \cos(a)) \tan \frac{1}{2} x}{\sqrt{(1 + \cos(a)) (1 - \cos(a))}} - 2 \frac{\arctan \frac{(-1 + \cos(a)) \tan \frac{1}{2} x}{\sqrt{(1 + \cos(a)) (1 - \cos(a))}}}{\sqrt{(1 + \cos(a)) (1 - \cos(a))}}$$

Comparez avec le resultat suivant, qui ne fait pas d'hypothèse sur b qui est considéré comme un nombre complexe)

> `int(1/(1+cos(b)*cos(x)),x);`

$$\frac{(-1 + \cos(b)) \tan \frac{1}{2} x}{\sqrt{(1 + \cos(b)) (-1 + \cos(b))}} - 2 \frac{\operatorname{arctanh} \frac{(-1 + \cos(b)) \tan \frac{1}{2} x}{\sqrt{(1 + \cos(b)) (-1 + \cos(b))}}}{\sqrt{(1 + \cos(b)) (-1 + \cos(b))}}$$

Maple peut au passage introduire des fonctions moins usuelles, comme ici le cosinus intégral

> `int(sin(x)^2/x,x);`

$$\frac{1}{2} \ln(x) - \frac{1}{2} \operatorname{Ci}(2x)$$

En fait, quand Maple ne donne pas de réponse, c'est la plupart du temps parce qu'une primitive de la fonction ne peut pas s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles connues par Maple

> `int(x^2/sin(x),x);`

$$\frac{x^2}{\sin(x)} dx$$

> `int(1/sqrt((1-x^2)*(2-x^2)),x);`

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(2-x^2)}} dx$$

[-] Changement de variables dans les primitives

La fonction Maple `changevar` du package `student` permet de faire à la main des changements de variable dans des calculs de primitives (nous utiliserons ici la forme inerte `Int` de la fonction `int`, qui ne cherche pas à calculer l'intégrale)

```
> with(student):
> changevar(t=tan(x), Int(1/(2+cos(x)^2), x), t);
```

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{t^2 + 1}} dt$$

```
> changevar(t=f(x), Int(g(t), t), x);
```

$$g(f(x)) \frac{f(x)}{x} dx$$

[-] Intégration par parties pour les primitives

La fonction Maple `intparts` du package `student` permet de faire à la main des intégrations par parties dans des calculs de primitives (nous utiliserons ici la forme inerte `Int` de la fonction `int`, qui ne cherche pas à calculer l'intégrale; le deuxième paramètre de cette fonction désigne le facteur qui doit être dérivé)

```
> intparts(Int(sin(x)/x, x), 1/x);
```

$$-\frac{\cos(x)}{x} - \frac{\cos(x)}{x^2} dx$$

[-] Intégrales

[-] Intégrales

Maple sait calculer certaines intégrales de fonctions usuelles soit par un calcul de primitive et un passage à la limite, soit en se ramenant à des tables d'intégrales connues

```
> int(1/(x^4+1), x=0..infinity);
```

```

[ > assume(a,real); int(1/(1+cos(a)*cos(x)),x=0..2*Pi);

$$\frac{1}{4} \sqrt{2}$$

[ > int(sin(log(x)),x=0..Pi/2);

$$2 \frac{\sqrt{1 - \cos(a)^2}}{\sqrt{1 - \cos(a)^2}}$$

[ > int(1/sqrt((1-x^2)*(2-x^2)),x=0..1);

$$-\frac{1}{4} \sin(\ln(2)) \cos(\ln( )) + \frac{1}{4} \cos(\ln(2)) \sin(\ln( )) - \frac{1}{4} \cos(\ln(2)) \cos(\ln( )) - \frac{1}{4} \sin(\ln(2)) \sin(\ln( ))$$

[ > int(exp(-alpha*x^2),x=0..infinity);

$$\frac{1}{2} \sqrt{2} \operatorname{EllipticK} \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

[ Pour les intégrales dépendant d'un paramètre, Maple peut ne calculer l'intégrale que lorsque le domaine du paramètre est restreint
[ > int(exp(-alpha*x^2),x=0..infinity);
Definite integration: Can't determine if the integral is convergent.
Need to know the sign of --> alpha
Will now try indefinite integration and then take limits.

$$\lim_x \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x} \operatorname{erf}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

[ > assume(alpha>0): int(exp(-alpha*x^2),x=0..infinity);

$$\frac{1}{2} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$


```

Calcul numérique des intégrales

[Lorsque Maple ne sait pas calculer formellement une intégrale on peut demander le calcul d'une valeur numérique approchée

```

[ > int(sqrt(x)*sin(x)/(x^2+1),x=0..1);

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x} \sin(x)}{x^2 + 1} dx$$

[ > evalf("");
.2444524641

```

[L'usage de la forme inerte Int permet de demander un calcul numérique, même lorsque le calcul formel aboutirait, mais sous une forme peu

utilisable

```
> evalf(Int(sin(x)/(x^2+1),x=0..1));
```

.3217935447

Remarque: autant on peut faire confiance à Maple dans le calcul des primitives (à condition d'interpréter correctement les résultats), autant le calcul des intégrales pose des difficultés beaucoup plus grandes; les résultats fournis doivent toujours être regardés avec la plus grande circonspection. En particulier, au moindre doute, il est souhaitable de comparer `evalf(int(f(t)=t=a..b)` (qui fournit la valeur numérique de l'intégrale préalablement calculée formellement) avec `evalf(Int(f(t)=t=a..b)` (qui fournit la valeur numérique de l'intégrale, sans que celle-ci soit calculée formellement).

Changement de variables dans les intégrales

La fonction Maple `changevar` du package `student` permet de faire à la main des changements de variable dans des calculs d'intégrales (nous utiliserons ici la forme inerte `Int` de la fonction `int`, qui ne cherche pas à calculer l'intégrale)

```
> with(student):
```

```
> changevar(t=tan(x),Int(1/(2+cos(x)^2),x=0..Pi/2),t);
```

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 + \frac{1}{t^2 + 1}} dt$$

```
> changevar(t=x^2,Int(g(t),t=u..v),x);
```

$$\int_{\sqrt{u}}^{\sqrt{v}} 2 g(x^2) x dx$$

Intégration par parties pour les intégrales

La fonction Maple `intparts` du package `student` permet de faire à la main des intégrations par parties dans des calculs d'intégrales (nous utiliserons ici la forme inerte `Int` de la fonction `int`, qui ne cherche pas à calculer l'intégrale; le deuxième paramètre de cette fonction désigne le facteur qui doit être dérivé

```
> intparts(Int(sin(x)/x,x=1..A),1/x);
```

$$-\frac{\cos(A)}{A} + \cos(1) - \int_1^A \frac{\cos(x)}{x^2} dx$$

Transformations intégrales

Le package `intrans` contient la plupart des fonctions Maple dédiées aux transformations intégrales

```
[ > with(inttrans):
```

Transformée de Fourier

La fonction `fourier` effectue la transformée de Fourier d'une fonction, définie par $\text{fourier}(f(t), t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) E^{(-ixt)} dt$

Maple ne calcule pas formellement directement les transformées de Fourier sous forme intégrale

```
[ > fourier(f(t), t, x);
```

$\text{fourier}(f(t), t, x)$

Par contre il sait calculer de nombreuses transformées de Fourier

```
[ > fourier(1/(1+t^2), t, x);
```

$e^x \text{Heaviside}(-x) + e^{(-x)} \text{Heaviside}(x)$

```
[ > fourier(exp(-abs(t)), t, x);
```

$\frac{2}{1+x^2}$

```
[ > fourier(exp(-t^2/2), t, x);
```

$\sqrt{2} \sqrt{\pi} e^{(-1/2 x^2)}$

A cet effet, Maple utilise fréquemment la fonction de Heaviside, définie par $\text{Heaviside}(t)=0$ si $t<0$, $\text{Heaviside}(t)=1$ si $t>0$ (elle n'est pas définie au point 0). Maple connaît la transformée de Fourier d'une dérivée

```
[ > fourier(diff(f(t), t$3), t, x);
```

$-I x^3 \text{fourier}(f(t), t, x)$

```
[ > diff(fourier(f(t), t, x), x);
```

$-\frac{1}{x} \text{fourier}(f(t), t, x)$

Ainsi que la transformée de Fourier d'une fonction multipliée par un polynôme

```
[ > fourier((t^2+1)*f(t), t, x);
```

$\text{fourier}(f(t), t, x) - \frac{2}{x^2} \text{fourier}(f(t), t, x)$

La transformée de Fourier inverse est donnée par la fonction `invfourier`.

```
[ > invfourier(fourier(f(t), t, x), x, w);
```

$f(w)$

En fait la transformée de Fourier inverse est pratiquement la transformée de Fourier elle-même, à un facteur multiplicatif près et un changement de la variable en son opposée

```
[ > fourier(fourier(f(t), t, x), x, w);
```

$$2 \int_0^\infty f(-w) dw$$

Transformée en cosinus ou sinus

Les transformées de Fourier en cosinus ou sinus sont définies par les intégrales $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos(xt) dt$ et $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \sin(xt) dt$ et calculées par les fonctions Maple `fouriercos` et `fouriersin`. Les résultats ne sont valides que pour $0 < x$

> `fouriercos(1/(1+t^2),t,x);`

$$\frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{\pi} e^{(-x)}$$

> `fouriersin(exp(-t^2),t,x);`

$$-\frac{1}{2} I \sqrt{\pi} e^{(-1/4 x^2)} \operatorname{erf} \frac{1}{2} I x$$

> `fouriercos(1/(t+1),t,x);`

$$-\frac{\sqrt{2} (\operatorname{Si}(x) \sin(x) + \operatorname{Ci}(x) \cos(x))}{\sqrt{\pi}}$$

Maple connaît les transformées de Fourier en cosinus et sinus d'une dérivée

> `fouriercos(diff(f(t),t),t,x);`

$$\frac{-\sqrt{2} f(0) + x \operatorname{fouriersin}(f(t), t, x) \sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}$$

> `fouriersin(diff(f(t),t),t,x);`

$$-x \operatorname{fouriercos}(f(t), t, x)$$

Maple connaît les transformées de Fourier en cosinus et sinus d'une fonction multipliée par un polynôme

> `fouriercos(t*f(t),t,x);`

$$-\frac{1}{x} \operatorname{fouriersin}(f(t), t, x)$$

Ces transformées sont involutives (appliquées deux fois elles redonnent la fonction initiale)

> `fouriercos(fouriercos(f(t),t,x),x,w);`

$$f(w)$$

> `fouriersin(fouriersin(f(t),t,x),x,w);`

$$f(w)$$

Transformée de Hilbert

La transformée de Hilbert d'une fonction est donnée (lorsque cela a un sens) par $\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{f(t)}{t-x} dt$ et elle est calculée par la fonction Maple

hilbert

> hilbert(1/(1+t^2),t,x);

$$-\frac{x}{1+x^2}$$

> hilbert(exp(I*t),t,x);

$$I e^{Ix}$$

Maple sait manipuler formellement certaines propriétés de la transformée de Hilbert vis à vis de la dérivation ou de la multiplication par un polynôme

> hilbert(diff(f(t),t),t,x);

$$-\frac{1}{x} \text{hilbert}(f(t), t, x)$$

> hilbert(t^2*f(t),t,x);

$$\frac{x^2 \text{hilbert}(f(t), t, x) - x \int_{-\infty}^{\infty} f(U) d_U + \int_{-\infty}^{\infty} U f(U) d_U}{1+x^2}$$

La transformée de Hilbert est presque involutive, si bien que la fonction invhilbert, qui calcule la transformée inverse, est pratiquement inutile

> hilbert(hilbert(f(t),t,x),x,w);

$$-f(w)$$

Transformée de Laplace

La transformée de Laplace (largement utilisée par les physiciens et les technologues) d'une fonction est donnée (lorsque cela a un sens) par

$\int_0^{\infty} f(t) e^{-xt} dt$ et elle est calculée par la fonction Maple laplace

> laplace(cos(t),t,x);

$$\frac{x}{1+x^2}$$

> laplace(sqrt(t),t,x);

$$\frac{1}{2} \frac{\sqrt{x}}{x^{3/2}}$$

```
> laplace(exp(-t^2), t, x);
```

$$\frac{1}{2} \frac{\sqrt{x} e^{(1/4)x^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2} \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$$

Maple sait manipuler formellement certaines propriétés de la transformée de Laplace vis à vis de la dérivation ou de la multiplication par un polynôme

```
> laplace(diff(f(t), t), t, x);
```

$$x \operatorname{laplace}(f(t), t, x) - f(0)$$

```
> laplace(t^2*f(t), t, x);
```

$$-\frac{2}{x^2} \operatorname{laplace}(f(t), t, x)$$

L'inverse de la transformée de Laplace est donnée par la fonction invlaplace

```
> invlaplace(1/(t+1), t, x);
```

$$e^{(-x)}$$

```
> invlaplace(1/(t^2+1), t, x);
```

$$\sin(x)$$

Transformée de Mellin

La transformée de Mellin d'une fonction est donnée (lorsque cela a un sens) par $\int_0^\infty f(t) t^{(x-1)} dt$ et elle est calculée par la fonction Maple

mellin

```
> mellin(cos(t), t, x);
```

$$\Gamma(x) \cos\left(\frac{1}{2} \pi x\right)$$

```
> mellin(t/(t^2+1), t, x);
```

$$\frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{1}{2} \pi x + \frac{1}{2} \pi\right)}{\sin\left(\frac{1}{2} \pi x + \frac{1}{2} \pi\right)}$$

```
> mellin(exp(-t^2), t, x);
```


| | |

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}x$$

Cours de mathématiques

par Denis Monasse

Ed. Vuibert

Table des matières

- Plan général
- Algèbre générale
- Algèbre linéaire
- Réduction des endomorphismes
- Topologie des espaces métriques
- Espaces vectoriels normés
- Comparaison des fonctions
- Suites et séries numériques
- Fonctions d'une variable réelle
- Intégration
- Suites et séries de fonctions

- Séries entières
- Formes quadratiques
- Formes hermitiennes
- Séries de Fourier
- Calcul différentiel
- Equations différentielles
- Espaces affines
- Courbes
- Surfaces
- Intégrales multiples
- Index