

## Reduction des endomorphismes

☐ L'ensemble des fonctions traitant de l'algèbre linéaire est regroupé dans un package Maple qui s'appelle linalg et qu'il est utile de charger dès le début :

```
> with(linalg):
```

```
Warning, new definition for norm
```

```
Warning, new definition for trace
```

☐ Nous utiliserons pour nos exemples la matrice suivante 7x7:

```
> A:=matrix([[3, -6, -27, -4, 61, -74, -94], [-20, 2, -17, -43, 35, -116, -142], [-8, -3, 20, -32, -14, -1, 27], [-6, 0, 16, -18, -20, 11, 29], [-4, 1, 5, -8, -9, -1, 3], [9, 0, -3, 24, -3, 32, 30], [-5, 1, -2, -9, 2, -21, -25]]);
```

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -6 & -27 & -4 & 61 & -74 & -94 \\ -20 & 2 & -17 & -43 & 35 & -116 & -142 \\ -8 & -3 & 20 & -32 & -14 & -1 & 27 \\ -6 & 0 & 16 & -18 & -20 & 11 & 29 \\ -4 & 1 & 5 & -8 & -9 & -1 & 3 \\ 9 & 0 & -3 & 24 & -3 & 32 & 30 \\ -5 & 1 & -2 & -9 & 2 & -21 & -25 \end{pmatrix}$$

## ☐ Éléments propres

### ☐ Vecteurs propres, valeurs propres

☐ La fonction charpoly renvoie le polynôme caractéristique d'une matrice par rapport à une variable choisie

```
> charpoly(A,x);
```

$$-4 + 8x + 3x^2 - 15x^3 + 6x^4 + 6x^5 - 5x^6 + x^7$$

```
> factor(");
```

$$(x + 1)^2 (x - 2)^2 (x - 1)^3$$

☐ La fonction minpoly renvoie le polynôme minimal

```
> minpoly(A,x);
```

$$2 - 3x - 3x^2 + 6x^3 - 3x^5 + x^6$$

```
> factor(");
```

$$(x - 2) (x + 1)^2 (x - 1)^3$$

☐ La fonction eigenvals renvoie elle les valeurs propres de la matrice, comptées avec leurs multiplicités

```
> eigenvals(A);
```

$$-1, -1, 2, 2, 1, 1, 1$$

☐ La fonction eigenvects renvoie une séquence de triplets, chacun constitué d'une valeur propre, de sa multiplicité et d'une base du sous-espace

└ propre associé

> **eigenvects(A);**

$-1, 2, \left\{ \frac{7}{2}, \frac{11}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{3}{2}, 1 \right\}, 2, 2, \left\{ -6, -3, -\frac{3}{4}, 1, \frac{3}{4}, 1, 0, -6, 1, \frac{5}{4}, 1, \frac{5}{4}, 0, 1 \right\}, [1, 3, \{[18, 37, 6, 1, 2, -12, 7]\}]$

└ On constate que -1 est valeur propre de multiplicité 2 mais que le sous espace propre associé est de dimension 1, engendré par le vecteur  $\frac{7}{2}, \frac{11}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{3}{2}, 1$ . La matrice n'est donc pas diagonalisable.

## ■ Sous espaces caractéristiques

└ Maple ne contient pas de fonction prédéfinie pour calculer les sous espaces caractéristiques. Elle est néanmoins facile à simuler: une première fonction auxiliaire prend en argument

- une liste de trois éléments dont la première est un scalaire (la valeur propre), la seconde une multiplicité et le troisième est ignoré (c'est la base du sous espace propre renvoyée par eigenvects)

- une matrice

et renvoie le sous espace caractéristique associé

> **aux\_ss\_esp\_car := (liste,A) -> [liste[1],liste[2],kernel(evalm((A-liste[1])^liste[2]))]:**

└ La fonction principale se contente d'appliquer la fonction auxiliaire au résultat de la fonction eigenvects, avec comme argument complémentaire la matrice elle-même

> **ss\_esp\_car:=proc(A) local elts\_propres;**  
                                  **elts\_propres:=[eigenvects(A)];**  
                                  **map(aux\_ss\_esp\_car,elts\_propres,A)**  
**end;**

└ Avec un essai pour notre matrice préférée (où l'on voit que la dimension des sous espaces caractéristiques est bien égale à la multiplicité des valeurs propres)

> **ss\_esp\_car(A);**

$[-1, 2, \{[-7, -11, 0, 1, 0, 3, -2], [4, 6, 1, 0, 0, -2, 1]\}], 1, 3, \left\{ \frac{9}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{2}, 1, 0, -\frac{3}{4}, 0, \frac{19}{4}, \frac{27}{4}, \frac{3}{2}, 0, 0, -\frac{9}{4}, 1, -\frac{35}{4}, -\frac{23}{4}, -\frac{7}{2}, 0, 1, \frac{9}{4}, 0 \right\},$   
 $2, 2, \left\{ -\frac{24}{5}, \frac{4}{5}, -1, \frac{4}{5}, 1, 0, \frac{4}{5}, -\frac{12}{5}, -\frac{18}{5}, 0, \frac{2}{5}, 0, 1, -\frac{3}{5} \right\}$

└ On peut réunir ces bases des sous espaces caractéristiques en une base de l'espace, puis construire une matrice de passage

> **map(v->op(op(3,v)),");**

$[4, 6, 1, 0, 0, -2, 1], [-7, -11, 0, 1, 0, 3, -2], -\frac{35}{4}, -\frac{23}{4}, -\frac{7}{2}, 0, 1, \frac{9}{4}, 0, \frac{19}{4}, \frac{27}{4}, \frac{3}{2}, 0, 0, -\frac{9}{4}, 1, \frac{9}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{2}, 1, 0, -\frac{3}{4}, 0,$   
 $-\frac{24}{5}, \frac{4}{5}, -1, \frac{4}{5}, 1, 0, \frac{4}{5}, -\frac{12}{5}, -\frac{18}{5}, 0, \frac{2}{5}, 0, 1, -\frac{3}{5}$

```
> P:=concat(op("));
```

$$P := \begin{pmatrix} 4 & -7 & \frac{-35}{4} & \frac{19}{4} & \frac{9}{4} & \frac{-24}{5} & \frac{-12}{5} \\ 6 & -11 & \frac{-23}{4} & \frac{27}{4} & \frac{5}{4} & \frac{4}{5} & \frac{-18}{5} \\ 1 & 0 & \frac{-7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & \frac{9}{4} & \frac{-9}{4} & \frac{-3}{4} & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \end{pmatrix}$$

```
> evalm(P^(-1) &* A &* P);
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{9}{4} & \frac{-33}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ce qui montre bien la stabilité de chacun des sous espaces caractéristiques par l'endomorphisme de matrice A.

## [- Réduction d'une matrice

### [- Réduction de Jordan

[- La fonction **jordan** renvoie une matrice de Jordan semblable à la matrice A

```
> jordan(A);
```

```

2  0  0  0  0  0  0
0 -1  1  0  0  0  0
0  0 -1  0  0  0  0
0  0  0  1  1  0  0
0  0  0  0  1  1  0
0  0  0  0  0  1  0
0  0  0  0  0  0  2

```

On peut adjoindre à cette fonction un deuxième argument formel, dans lequel Maple stockera une matrice de passage P

```

> jordan(A, 'P'):
> evalm(P^(-1) &* A &* P);

```

```

2  0  0  0  0  0  0
0 -1  1  0  0  0  0
0  0 -1  0  0  0  0
0  0  0  1  1  0  0
0  0  0  0  1  1  0
0  0  0  0  0  1  0
0  0  0  0  0  0  2

```

## Diagonalisation

Bien entendu, pour une matrice diagonalisable, la forme de Jordan n'est autre qu'une matrice diagonale, et donc la fonction jordan peut servir à diagonaliser une matrice (on prend ici une matrice 4x4 au hasard, mais symétrique de telle sorte qu'elle soit diagonalisable sur le corps des réels, et en virgule flottante de telle sorte que Maple puisse calculer explicitement les valeurs propres)

```

> B:=map(evalf,randmatrix(4,4,symmetric)):
jordan(B);

```

```

-87.80297636      0      0      0
      0  41.73129102      0      0
      0      0  87.88079194      0
      0      0      0  194.1908934

```

# Cours de mathématiques

par Denis Monasse

Ed. Vuibert

## Table des matières

- Plan général
- Algèbre générale
- Algèbre linéaire
- Réduction des endomorphismes
- Topologie des espaces métriques
- Espaces vectoriels normés
- Comparaison des fonctions
- Suites et séries numériques
- Fonctions d'une variable réelle
- Intégration
- Suites et séries de fonctions

- Séries entières
- Formes quadratiques
- Formes hermitiennes
- Séries de Fourier
- Calcul différentiel
- Equations différentielles
- Espaces affines
- Courbes
- Surfaces
- Intégrales multiples
- Index