

Suites et séries

Suites

Suites définies par récurrence

Maple sait résoudre un certain nombre de récurrences (encore appelées équations aux différences) grâce à la fonction `rsolve` (Recurrence SOLVE). Parmi celles-ci les récurrences linéaires à une suite inconnue

```
> rsolve(x(n+1)=-3*x(n)-2*x(n-1),x(n));
```

$$(2x(0) + x(1))(-1)^n + (-x(0) - x(1))(-2)^n$$

ou encore à deux (ou plus) suites inconnues

```
> rsolve({x(n+1)=x(n)-y(n),y(n+1)=-2*x(n)+y(n)},{x(n),y(n)});
```

$$\{y(n) = \frac{1}{2}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2}-1} x(0) \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}-1} y(0) + \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} x(0) + -\frac{1}{\sqrt{2}+1} y(0) \\ / ((\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)), x(n) = -\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{2}-1} y(0) \sqrt{2} - 2 \frac{1}{\sqrt{2}-1} x(0) \\ - \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} y(0) - 2 - \frac{1}{\sqrt{2}+1} x(0) / ((\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1))\}$$

On peut ajouter des conditions initiales

```
> assume(theta,real);
rsolve({x(n+1)=2*cos(theta)*x(n)-x(n-1),x(0)=1,x(1)=2*cos(theta)},x(n));
```

$$\frac{1}{2} \frac{I \frac{1}{\cos(\theta) + \%1}}{\sqrt{1 - \cos(\theta)^2} (\cos(\theta) + \%1)} - \frac{1}{2} \frac{I \frac{1}{\cos(\theta) - \%1}}{\sqrt{1 - \cos(\theta)^2} (\cos(\theta) - \%1)} \\ \%1 := I \sqrt{1 - \cos(\theta)^2}$$

Maple peut également résoudre certaines récurrences non linéaires, comme celles que l'on trouve dans les calculs de complexité en informatique

```
> rsolve(x(n)=3*x(n/2)+a*n,x(n));
```

$$x(1) n^{\frac{\ln(3)}{\ln(2)}} + n^{\frac{\ln(3)}{\ln(2)}} - 3a \frac{2}{3}^{\frac{\ln(n)}{\ln(2)} + 1} + 2a$$

Par contre, Maple peut se trouver bloqué devant certaines récurrences dont la solution est évidente

```
> rsolve(x(n)=x(n-1)*x(n-2),x(n));
rsolve(x(n)=x(n-1)x(n-2),x(n))
```

alors qu'il suffit d'introduire par exemple $y(n)=\log(x(n))$.

Limites de suites

Maple sait calculer un certain nombre de limites de suites

```
> limit(sin(n)/n,n=infinity);
```

$$0$$

```
> limit(n^2*log(cos(1/n)),n=infinity);
```

$$-\frac{1}{2}$$

```
> limit(n!*exp(n)/n^(n+1/2),n=infinity);
```

$$\sqrt{2} \sqrt{}$$

[-] Développements asymptotiques

La fonction **asympt** permet d'obtenir des développements asymptotiques de certaines suites relativement élémentaires.

> **asympt(n^2*log(cos(1/n)),n,10);**

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{12} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{45} \frac{1}{n^4} - \frac{17}{2520} \frac{1}{n^6} + O \frac{1}{n^8}$$

> **asympt(n!*exp(n)/n^(n+1/2),n);**

$$\sqrt{2} \sqrt{} + \frac{1}{12} \frac{\sqrt{2} \sqrt{}}{n} + \frac{1}{288} \frac{\sqrt{2} \sqrt{}}{n^2} - \frac{139}{51840} \frac{\sqrt{2} \sqrt{}}{n^3} - \frac{571}{2488320} \frac{\sqrt{2} \sqrt{}}{n^4} + \frac{163879}{209018880} \frac{\sqrt{2} \sqrt{}}{n^5} + O \frac{1}{n^6}$$

Dans certains cas, le résultat (non évalué) de la fonction **rsolve** peut être injecté dans la fonction **asympt** de manière à obtenir un développement asymptotique des suites solutions:

> **rsolve(x(n+1)=sin(x(n)),x(n));**

$$\text{rsolve}(x(n+1) = \sin(x(n)), x(n))$$

> **asympt(",n);**

$$\sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{n}} + -C - \frac{3}{10} \sqrt{3} \ln(n) \frac{1}{n}^{3/2} + O \frac{1}{n^2}$$

[-] Séries

Maple ne connaît qu'un très petit nombre de fonctions sur les séries. (Il ne faut surtout pas croire que les séries de Maple sont des séries au sens mathématique; il s'agit uniquement de développements limités.)

[-] Sommation de séries

La seule fonction réellement utile est la fonction **sum** qui permet dans certains cas de calculer la somme d'une série convergente.

> **sum(1/n^2,n=1..infinity);**

$$\frac{1}{6}^2$$

> **sum(1/n^4,n=1..infinity);**

$$\frac{1}{2} I \quad (1 - I) - \frac{1}{2} I \quad (1 + I)$$

> **sum(1/n!,n=0..infinity);**

$$e$$

> **sum((n^2-1)/n!,n=0..infinity);**

$$-1$$

[-] Règles classiques

Bien entendu, à l'aide de la fonction **limit**, il est facile d'appliquer, dans des cas tout à fait élémentaires, certaines règles classiques comme la règle de Cauchy, la règle de d'Alembert ou la règle de Duhamel.

Voici un exemple d'utilisation de la règle de Cauchy

> **xn:=a^n/(n^2+1): limit(xn^(1/n),n=infinity);**

$$a$$

Un exemple avec la règle de d'Alembert

> **limit(subs(n=n+1,xn)/xn,n=infinity);**

$$a$$

Et un dernier avec la règle de Duhamel

```
> xn:=n/(n^3+1): limit(n*(subs(n=n+1,xn)/xn-1),n=infinity);
```

$$-2$$

[-] Développements asymptotiques

La fonction **asympt** permet d'obtenir des développements asymptotiques des sommes partielles ou des restes de certaines séries

```
> asympt(sum(1/k^3,k=1..n),n);
```

$$(3) \quad -\frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{n^3} - \frac{1}{4} \frac{1}{n^4} + O \frac{1}{n^6}$$

```
> asympt(sum(1/k,k=1..n),n);
```

$$\ln(n) + \frac{1}{2} \frac{1}{n} - \frac{1}{12} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{120} \frac{1}{n^4} + O \frac{1}{n^6}$$

```
> expand(asympt(sum((k+1)/(k^4+2*k^2),k=n..infinity),n));
```

$$\frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + \frac{5}{6} \frac{1}{n^3} + \frac{1}{4} \frac{1}{n^4} - \frac{16}{15} \frac{1}{n^5} + O \frac{1}{n^6}$$

```
> expand(asympt(sum(log(k)^2/k^2,k=1..n),n));
```

$$(2,2) \quad -\frac{\ln(n)^2}{n} - 2 \frac{\ln(n)}{n} - \frac{2}{n} + \frac{1}{2} \frac{\ln(n)^2}{n^2} + \frac{1}{6} \frac{\ln(n)}{n^3} - \frac{1}{6} \frac{\ln(n)^2}{n^3} + \frac{1}{30} \frac{\ln(n)^2}{n^5} + \frac{1}{40} \frac{1}{n^5} - \frac{13}{180} \frac{\ln(n)}{n^5} + O \frac{1}{n^6}$$

La fonction **expand** a permis ici de simplifier le résultat qui est présenté par Maple d'une façon réellement peu agréable (éviter l'emploi ici de la fonction **simplify** qui détruit le bel ordonnancement du développement asymptotique).

La fonction **eulermac** (qu'il faut charger depuis la librairie) rend les mêmes services en recherchant un développement asymptotique des sommes partielles d'une série; ce développement est donné à une constante près.

```
> readlib(eulermac);
```

```
> eulermac(log(n)/n,n);
```

$$\frac{1}{2} \ln(n)^2 - \frac{1}{2} \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{12} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{12} \frac{\ln(n)}{n^2} - \frac{11}{720} \frac{1}{n^4} + \frac{1}{120} \frac{\ln(n)}{n^4} + \frac{137}{15120} \frac{1}{n^6} - \frac{1}{252} \frac{\ln(n)}{n^6} + O \frac{13068}{n^8} - 5040 \frac{\ln(n)}{n^8}$$

```
> eulermac(1/(n*log(n)^2),n);
```

$$-\frac{1}{\ln(n)} - \frac{1}{2} \frac{1}{n \ln(n)^2} - \frac{1}{12} \frac{1}{n^2 \ln(n)^2} - \frac{1}{6} \frac{1}{n^2 \ln(n)^3} + \frac{1}{120} \frac{1}{n^4 \ln(n)^2} + \frac{11}{360} \frac{1}{n^4 \ln(n)^3} + \frac{1}{20} \frac{1}{\ln(n)^4 n^4} + \frac{1}{30} \frac{1}{\ln(n)^5 n^4} - \frac{1}{252} \frac{1}{n^6 \ln(n)^2} - \frac{137}{7560} \frac{1}{n^6 \ln(n)^3} - \frac{5}{112} \frac{1}{\ln(n)^4 n^6} - \frac{17}{252} \frac{1}{\ln(n)^5 n^6} - \frac{5}{84} \frac{1}{\ln(n)^6 n^6} - \frac{1}{42} \frac{1}{\ln(n)^7 n^6} + O \frac{5040}{n^8 \ln(n)^2} - \frac{26136}{n^8 \ln(n)^3} - \frac{78792}{\ln(n)^4 n^8} - \frac{162456}{\ln(n)^5 n^8} - \frac{235200}{\ln(n)^6 n^8} - \frac{231840}{\ln(n)^7 n^8} - \frac{141120}{\ln(n)^8 n^8} - \frac{40320}{\ln(n)^9 n^8}$$

Il ne vous reste plus qu'à faire le tri (en particulier à l'intérieur du grand O) et à réintroduire la somme de la série dans le cas d'une série convergente.

Cours de mathématiques

par Denis Monasse

Ed. Vuibert

Table des matières

- Plan général
- Algèbre générale
- Algèbre linéaire
- Réduction des endomorphismes
- Topologie des espaces métriques
- Espaces vectoriels normés
- Comparaison des fonctions
- Suites et séries numériques
- Fonctions d'une variable réelle
- Intégration
- Suites et séries de fonctions

- Séries entières
- Formes quadratiques
- Formes hermitiennes
- Séries de Fourier
- Calcul différentiel
- Equations différentielles
- Espaces affines
- Courbes
- Surfaces
- Intégrales multiples
- Index