

# Groupes

## ≡ Groupes en Maple

- Les groupes finis sont manipulés par Maple à l'aide d'un package spécialisé **group**:
- > **with(group):**

## ≡ Groupes de permutation

- Les premiers objets manipulés par Maple sont les permutations de  $[1, n]$ . Celles-ci peuvent être représentées soit sous forme d'une liste  $[(1), (2), (3), \dots]$  soit sous forme de produit de cycles disjoints. Un cycle est représenté sous forme d'une liste:  $[a_1, a_2, a_3, a_4]$  désigne la permutation circulaire des quatre objets  $a_1, a_2, a_3, a_4$ . Un produit de cycles disjoints est représenté par une liste de cycles. On passe de l'une des représentations à l'autre par la fonction **convert** avec l'option **disjcyc** pour convertir en cycles, **permist** pour convertir en liste.
- > **convert([4,5,1,3,2], 'disjcyc');**  
[[1, 4, 3], [2, 5]]
- > **convert([[1,5,6],[2,3,4]], 'permlist', 6);**  
[5, 3, 4, 2, 6, 1]
- La fonction **permgrou** permet de construire le sous groupe de  $S_n$  engendré par un ensemble de permutations, chacune étant entrée sous forme de produits de cycles disjoints.
- > **G:=permgrou(5, {[2,5,3],[1,4]],[3,4]});**  
 $G := \text{permgrou}(5, \{ [2, 5, 3], [1, 4], [3, 4] \})$
- On peut calculer l'ordre d'un groupe (son cardinal)
- > **grouporder(G);**  
120
- On peut tester si le groupe est commutatif
- > **isabelian(G);**  
*false*
- On peut trouver son centre (en l'occurrence réduit à l'élément neutre)
- > **center(G);**  
 $\text{permgrou}(5, \{ \})$
- On peut en prendre un élément au hasard
- > **x:=RandElement(G);**  
 $x := [1, 5, 3, 4]$
- Tester si un élément fait partie du groupe
- > **groupmember(x, G);**

```

[                                     true
[ On peut rechercher divers sous-groupes: le centralisateur d'une famille d'éléments (c'est à dire l'ensemble des éléments du groupe qui commutent à
[ tous les éléments de la famille)
[ > H:=centralizer(G,{x});
[                                     H := permgroup(5, {[1, 5, 3, 4]}))
[ le normalisateur d'un sous groupe dans un groupe (c'est à dire l'ensemble des éléments  $x$  tels que  $xHx^{(-1)} = H$ )
[ > K:=normalizer(G,H);
[                                     K := permgroup(5, {[1, 5, 3, 4]}, [[4, 5]]))
[ tester si un sous groupe est distingué dans un groupe
[ > isnormal(K,H);
[                                     true
[ > isnormal(G,K);
[                                     false
[ calculer des représetants des classes à droite relativement à un sous groupe, et donc l'indice du sous-groupe (cardinal du quotient)
[ > cosets(G,K);
[ { [[3, 5]], [ ], [[3, 4]], [[2, 5, 3]], [[2, 5, 3, 4]], [[2, 3, 5]], [[2, 4], [3, 5]], [[2, 3, 4]], [[1, 4, 3, 2]], [[2, 4]], [[2, 5]], [[2, 3]],
[   [[1, 4, 2], [3, 5]], [[2, 4, 3]], [[1, 4, 2]] }
[ > nops(");
[                                     15
[ et vérifier au passage le théorème de Lagrange
[ > grouporder(G)/grouporder(K);
[                                     15
[ On peut calculer le groupe dérivé d'un groupe (c'est à dire le sous groupe engendré par les  $x y x^{(-1)} y^{(-1)}$ )
[ > Der:=derived(G);
[                                     Der := permgroup(5, {[ ], [[1, 2], [3, 4]], [[1, 3], [4, 5]], [[1, 2], [4, 5]]})
[ vérifier qu'il est distingué
[ > isnormal(G,Der);
[                                     true
[ On peut même construire la suite des groupes dérivés successifs
[ > LCS(K);
[                                     [permgroup(5, {[1, 5, 3, 4]}, [[4, 5]]), permgroup(5, {[ ], [[1, 3], [4, 5]]}), permgroup(5, {[ ]})]
[ > map(grouporder, " );
[                                     [8, 2, 1]
[ Lorsqu'un nombre premier  $p$  divise le cardinal d'un groupe  $G$ , on appelle  $p$ -sous groupe de Sylow un sous groupe de cardinal  $p^k$  où  $p^k$  est la plus

```

grande puissance de  $p$  divisant le cardinal de  $G$ . Ici, le cardinal du groupe est  $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ . On peut donc rechercher des sous groupes de Sylow relatifs aux nombres premiers 2,3 et 5:

```
> [Sylow(G,2),Sylow(G,3),Sylow(G,5)];
[permgroupe(5, {[1, 5, 2, 4]}, [[4, 5]]), permgroupe(5, {[2, 4, 5]}), permgroupe(5, {[1, 3, 5, 2, 4]})]
```

et vérifier leurs ordres

```
> map(grouporder, " );
[8, 3, 5]
```

## Générateurs et relation

Une autre manière de présenter les groupes en Maple et de définir ces groupes par des générateurs abstraits (des noms Maple) vérifiant un certain nombre de relations écrites sous forme de produits de générateurs (ou inverses de générateurs) égaux à l'identité; les produits entrant dans ces relations seront écrits sous forme de listes. C'est ainsi que pour définir un groupe  $G_1$  engendré par deux éléments  $a$  et  $b$  vérifiant les relations  $a^2 = e$ ,  $b^3 = e$ ,  $(ab)^3 = e$ , on posera

```
> G1:=grelgroup({a,b},{[a,a],[b,b,b],[a,b,a,b,a,b]});
G1 := grelgroup({a,b},{[a,b,a,b,a,b],[b,b,b],[a,a]})
```

Quelques fonctions de Maple permettent de manipuler de tels groupes.

# Cours de mathématiques

par Denis Monasse

Ed. Vuibert

## Table des matières

- Plan général
- Algèbre générale
- Algèbre linéaire
- Réduction des endomorphismes
- Topologie des espaces métriques
- Espaces vectoriels normés
- Comparaison des fonctions
- Suites et séries numériques
- Fonctions d'une variable réelle
- Intégration
- Suites et séries de fonctions

- Séries entières
- Formes quadratiques
- Formes hermitiennes
- Séries de Fourier
- Calcul différentiel
- Equations différentielles
- Espaces affines
- Courbes
- Surfaces
- Intégrales multiples
- Index