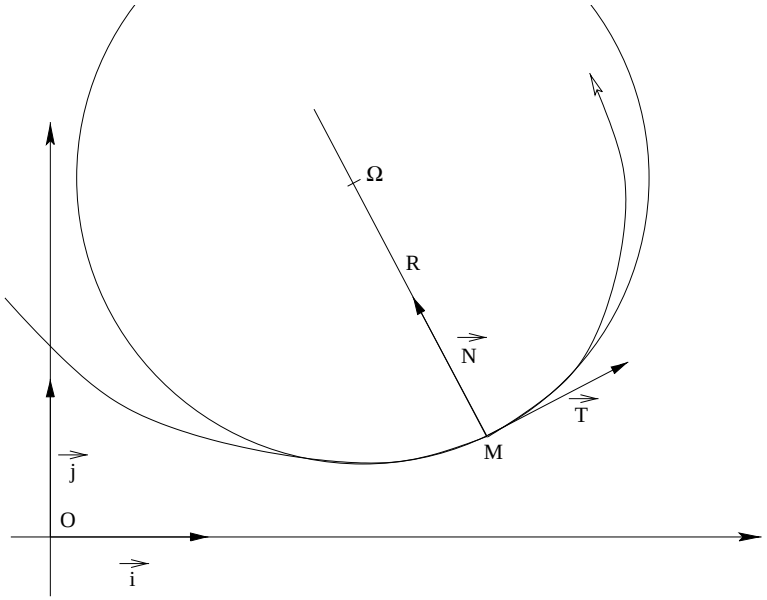
Sup & Spé TSI – Résumé de Cours

Mathématiques



Calcul élémentaire de la courbure en un point birégulier

On considère la fonction angulaire associée φ qui est l'angle entre Ox et $\overrightarrow{T}$, $\varphi = \left(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{T}}\right)$
d'où, en paramétriques :

$$\overrightarrow{T} : \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \Big/ \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Big/ \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{N} : \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

En polaires, on a :

$$\varphi = \theta + V$$

Théorème : Avec les notations précédentes, on a :

$$\gamma = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} \quad R = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi}$$

Démonstration : $\overrightarrow{T} : \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ qu'on dérive par rapport à s. D'où $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \gamma\overrightarrow{N} : \begin{pmatrix} -\sin\varphi \times \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} \\ \\ \cos\varphi \times \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} \end{pmatrix}$.

Ce qui donne immédiatement : $\gamma = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}$. ■

Christophe Caignaert

Lycée Colbert – 59200 Tourcoing

http://c.caignaert.free.fr

Année scolaire 2003 – 2004

Année Scolaire 2003 – 2004

LES PRINCIPALES modifications cette année sont principalement des ajouts de figures et de considérations élémentaires.
On a bien sûr également relu le contenu et corrigé quelques bogues : qu'on se rassure, il en reste ! Un grand merci aux lecteurs attentifs.
Ce document est disponible sur mon site personnel : `http://c.caignaert.free.fr`
Ce site contient également un cours complet de Spé TSI, tant en pdf qu'en html.
Il a été écrit sous pdfLaTeX, une version spécifique de LaTeX qui produit directement des fichiers au format `pdf`. Ces fichiers ont l'avantage de s'afficher et s'imprimer correctement.
Pour la présentation du document, on a redéfini quelques commandes LaTeX de base, comme « \section », la génération de l'index...
Les extensions LaTeX utilisées sont habituelles, les caractères de texte sont en *palatino* et les caractères mathématiques utilisent les fontes *pple* adaptée au *palatino*.
Cette version du document est celle du 8 juin 2004.

Sommaire

I Algèbre 7

1. Théorie des ensembles 7
1.1. Ensembles . . . 7
1.2. Sous-ensembles . . . 7
1.3. Loi de composition interne . . . 7
1.4. Ensembles finis . . . 8

2. Fonctions et applications 8
2.1. Applications . . . 8
2.2. Image, image réciproque d'une partie . . . 8
2.3. Injection, surjection, bijection . . . 8
2.4. Composition des applications . . . 9
2.5. Ensemble des applications de E vers F . . . 9

3. Structure de Groupe 9
3.1. Groupe . . . 9
3.2. Sous-groupe . . . 9
3.3. Morphisme de groupe . . . 9

4. Structure d'Anneau 10
4.1. Anneau . . . 10
4.2. Sous-anneau . . . 10
4.3. Exemples d'anneaux . . . 10
4.4. Arithmétique de $\mathbb{Z}$ . . . 10

5. Structure de Corps 11
5.1. Corps . . . 11
5.2. Corps usuels . . . 11

6. Structure d'Algèbre 11
6.1. Algèbre . . . 11
6.2. Sous-algèbre . . . 11
6.3. Algèbres usuelles . . . 11

7. Nombres Réels 11
7.1. Inégalités, Bornes . . . 11
7.2. Partie entières . . . 12
7.3. Formule du Binôme . . . 12

8. Nombres Complexes 13
8.1. Nombres Complexes . . . 13
8.2. Inégalité triangulaire . . . 13
8.3. Groupe des unités . . . 13
8.4. Racines d'un nombre complexe . . . 13
8.5. Géométrie du plan complexe . . . 13

9. Polynômes 14
9.1. Racines . . . 14
9.2. Division Euclidienne . . . 15

10. Fractions Rationnelles 15
10.1. Décomposition en éléments simples . . . 15
10.2. Conseils pratiques . . . 15

11. Espaces Vectoriels 16
11.1. Structure d'espace vectoriel . . . 16
11.2. Sous-espace vectoriel . . . 16
11.3. Somme de sous-espaces vectoriels . . . 16
11.4. Norme sur un espace vectoriel . . . 17
11.5. Esp. vect. de dim. finie : base . . . 17
11.6. Espaces vectoriels usuels . . . 17

12. Applications Linéaires 18
12.1. Applications linéaires . . . 18
12.2. s-e-v stable par f . . . 18
12.3. Image et noyau . . . 18
12.4. Projecteur . . . 19
12.5. Théorème du rang . . . 19
12.6. Système linéaire . . . 19

13. Matrices 19
13.1. Généralités . . . 19
13.2. Généralités sur les matrices carrées . . . 20
13.3. Matrice d'une application linéaire . . . 21
13.4. Matrice de Passage . . . 21
13.5. Changements de base . . . 21

14. Déterminants 22
14.1. Ordre 2 et 3 . . . 22
14.2. Matrice triangulaire . . . 22
14.3. Ordre quelconque . . . 22
14.4. Déterminant d'un produit . . . 22
14.5. Dét. d'une mat. triangulaire par blocs . . . 22

15. Réduction des Endomorphismes 23
15.1. Valeurs propres et vecteurs propres . . . 23
15.2. Polynôme caractéristique . . . 23
15.3. Diagonalisibilité . . . 23
15.4. Diagonalisibilité et diagonalisation . . . 23
15.5. Triangularisation . . . 23
15.6. Puissances d'une matrice . . . 24

16. Espaces Préhilbertiens Réels et Euclidiens 24
16.1. Produit scalaire . . . 24
16.2. Esp. vect. préhilbertiens et euclidiens . . . 25
16.3. Inégalités . . . 25
16.4. Endomorphismes symétriques . . . 25
16.5. Matrice symétrique réelle . . . 25
16.6. Procédé de Schmidt . . . 25
16.7. Projection sur un s-e-v de dim. finie . . . 26
16.8. Méthode des Moindres Carrés . . . 26

17. Groupe Linéaire et Groupe Orthogonal 27
17.1. Groupe linéaire . . . 27
17.2. Groupe orthogonal . . . 27

II Analyse 28

18. Suites 28
18.1. Suites . . . 28
18.2. Sous-suites . . . 28

18.3. Suites vectorielles . . . 28
18.4. Suites réelles ou complexes . . . 28
18.5. Suites réelles . . . 29
18.6. Suites récurrentes . . . 29
18.7. Suites récurrentes linéaires . . . 29

19. Fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 29
19.1. Ensemble de définition . . . 29
19.2. Monotonie . . . 29
19.3. Limite et continuité . . . 30
19.4. Continuité sur un intervalle . . . 30
19.5. Fn en escalier, continue par morceaux . . . 31
19.6. Limites usuelles . . . 31
19.7. Equivalents . . . 31
19.8. Négligeabilité . . . 31

20. Dérivabilité 32
20.1. Dérivée, classe $\mathscr{C}^1$ et notations . . . 32
20.2. Classe $\mathscr{C}^n$ . . . 32
20.3. Somme et produit . . . 32
20.4. Dérivée d'une fonction composée . . . 32
20.5. Dérivée et prolongement par continuité 32
20.6. Th. de Rolle, T.A.F., Formules de Taylor 33
20.7. Zéros d'une fonction . . . 33
20.8. Développements limités . . . 34
20.9. Opérations sur les dl_n . . . 34

21. Fonctions usuelles 35
21.1. Exponentielle et Logarithme . . . 35
21.2. Fonctions trigonométriques circulaires . 35
21.3. Fonc. trigonométriques réciproques . . 36
21.4. Fonc. trigonométriques hyperboliques . 37
21.5. Fonc. trig. hyperboliques réciproques . 38
21.6. Autres fonctions usuelles . . . 40

22. Trigonométrie 40
22.1. Propriétés élémentaires . . . 40
22.2. Symétries . . . 42
22.3. Arc double . . . 42
22.4. Sommes d'arcs . . . 42
22.5. Transformation de produits en sommes 42
22.6. Transformation de sommes en produits 43
22.7. Formule de Moivre . . . 43
22.8. Fonctions réciproques . . . 43
22.9. Pour le calcul intégral . . . 43

23. Recherche de primitives 43
23.1. Fraction rationnelle en x . . . 43
23.2. Fractions rationnelles diverses . . . 43
23.3. Polynôme $\times$ exponentielle . . . 44
23.4. Primitives usuelles . . . 44

24. Intégrale de Riemann 44
24.1. Primitive . . . 44
24.2. Inégalités . . . 44
24.3. Théorème des 3 conditions . . . 46
24.4. Intégrale dépendant d'une borne . . . 46
24.5. Continuité et dérivation sous $\int \ldots$ . . . 46
24.6. Int. par parties et chang. de variable . . 46
24.7. Sommes de Riemann . . . 46

25. Intégrale généralisée 47
25.1. Convergence . . . 47
25.2. Fonctions positives . . . 47
25.3. Théorème des 3 conditions . . . 48
25.4. Int. par parties et chang. de variable . . 48
25.5. Un procédé de convergence . . . 48
25.6. Continuité et dérivation sous $\int \ldots$ . . . 48
25.7. Ensemble de définition . . . 49

26. Intégrales doubles et triples 49
26.1. Description hiérarchique du domaine . 49
26.2. Calcul d'Aires et de Volumes . . . 50
26.3. Inclusion des domaines . . . 50
26.4. Changement de variables . . . 51

27. Séries numériques (réelles ou complexes) 53
27.1. Convergence et Convergence Absolue . 53
27.2. Séries géométriques . . . 53
27.3. Séries positives . . . 53
27.4. Critère spécial des séries alternées . . . 54
27.5. Comparaison série-intégrale . . . 54
27.6. Suite et série des différences . . . 55
27.7. Calcul exact de sommes de séries . . . 55
27.8. Calcul approché de sommes de séries . 55

28. Séries Entières 55
28.1. Rayon de convergence . . . 56
28.2. Convergence . . . 56
28.3. Somme de deux séries entières . . . 57
28.4. Développement en série entière . . . 57
28.5. Séries entières usuelles . . . 57
28.6. Sér. ent. solution d'une équation diff. . . 57

29. Séries de Fourier 57
29.1. Coefficients de Fourier . . . 57
29.2. Cas où f est 2π-périodique . . . 59
29.3. Convergence . . . 59
29.4. Produit scalaire et formule de Parseval . 59

30. $\int \Sigma = \Sigma \int \ldots$ 60
30.1. Série entière . . . 60
30.2. Série de Fourier . . . 60
30.3. Autres cas . . . 60

31. Fonctions $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ 61
31.1. Limite et continuité . . . 61
31.2. Classe $\mathscr{C}^1$ et $\mathscr{C}^2$ . . . 61
31.3. Extrémums d'une fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ . . . 62

32. Fonctions (ou suites) à valeur dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ 62
32.1. Limite et continuité . . . 62
32.2. Fonction $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, classe $\mathscr{C}^1$ . . . 62
32.3. Fonction $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, classe $\mathscr{C}^1$ . . . 63

33. Equations et systèmes différentiels 63
33.1. Généralités . . . 63
33.2. Non Linéaire du premier ordre . . . 64
33.3. Linéaire du premier ordre . . . 64
33.4. Lin. du sec. ordre à coeff. constants . . . 64
33.5. Linéaire du second ordre . . . 64
33.6. Equation aux dérivées partielles . . . 65
33.7. Système Linéaire du premier ordre . . . 65
33.8. Système autonome . . . 66

III Géométrie 67

34. Barycentre 67
34.1. Barycentre de p points pondérés . . . 67
34.2. Associativité du barycentre . . . 67

35. Vecteurs du plan et de l'espace 67
35.1. Produit scalaire . . . 67
35.2. Produit vectoriel . . . 67
35.3. Déterminants . . . 67

36. Droites et Plans affines 67
36.1. Droites du plan . . . 68
36.2. Plans de l'espace affine . . . 68
36.3. Droites de l'espace affine . . . 69
36.4. Angles . . . 69
36.5. Aires et Volumes élémentaires . . . 69
36.6. Distances . . . 69

37. Projecteurs et Symétries 70
37.1. Projecteur . . . 70
37.2. Symétrie . . . 70

38. Isométries 70
38.1. Isométries vectorielles et affines . . . 70
38.2. Symétries orthogonales . . . 70
38.3. Recherche d'une symétrie orthogonale . . . 71
38.4. Isométries Vectorielles . . . 71
38.5. Isométries Affines . . . 72

39. Similitudes 72
39.1. Similitude . . . 72
39.2. Identification . . . 72

40. Courbes Planes 73
40.1. Courbes d'équation $y = f(x)$ . . . 73
40.2. Courbes planes en paramétriques . . . 74
40.3. Courbes planes en polaires . . . 76
40.4. Courbes usuelles en polaires . . . 78

41. Courbure et Rayon de Courbure 78
41.1. Rayon de courbure d'une courbe plane 78
41.2. Recherche de la courbure . . . 79

42. Surfaces : Généralités 80
42.1. Surfaces, plan tangent . . . 80
42.2. Tangente à une courbe de l'espace . . . 81

43. Cercles et Sphères 82
43.1. Cercles dans le plan et sphères . . . 82
43.2. Cocyclicité . . . 82
43.3. Cercles dans l'espace. . . . 82

44. Coniques 83
44.1. Ellipses . . . 83
44.2. Paraboles . . . 84
44.3. Hyperboles . . . 85
44.4. Identification d'une conique . . . 85
44.5. Projection d'une conique sur un plan . . . 86

45. Quadriques 87
45.1. Equations réduites . . . 87
45.2. Intersection avec un plan . . . 87
45.3. Identification d'une quadrique . . . 89

46. Surfaces de révolution, cylindres et cônes 89
46.1. Surfaces de révolution . . . 89
46.2. Cylindres . . . 90
46.3. Cônes . . . 91
46.4. Cylindres et cônes de révolution . . . 93

IV Maple 94

47. Bases 94
47.1. Manipulations de base . . . 94
47.2. Constantes . . . 94
47.3. Sommes et produits . . . 95
47.4. Fonctions d'évaluation . . . 95
47.5. Transformation générale d'expressions . 95
47.6. Simplification d'expressions . . . 96
47.7. Structures de données . . . 96

48. Mathématiques usuelles 96
48.1. Fonctions mathématiques usuelles . . . 96
48.2. Limites et développements limités . . . 96
48.3. Dérivées . . . 97
48.4. Primitives et intégrales . . . 97
48.5. Solve... . . . 97

49. Algèbre linéaire 97
49.1. Vecteurs . . . 97
49.2. Procédé de Schmidt . . . 98
49.3. Matrices . . . 98
49.4. Eléments propres . . . 98

50. Graphiques 98
50.1. Courbes du plan . . . 98
50.2. Surfaces . . . 99
50.3. Courbes de l'espace . . . 99
50.4. Tracé simultané . . . 99

51. Structures de contrôle et procédures 99
51.1. Structure alternative . . . 99
51.2. Structure répétitive . . . 100

51.3. Procédures 100

52. Exemples de Programmes **100**
52.1. Un programme très simple 101
52.2. Structure alternative 101
52.3. Structure itérative « pour » 101
52.4. Structure itérative « tant que » 101
52.5. Récurrence sur plusieurs rangs 102
52.6. Un exemple en algèbre linéaire 102

Index **104**

Figures

1 Projection orthogonale 26
2 Méthode des Moindres Carrés 27
3 Théorème de Newton-Raphson 34
4 Fns exponentielle et logarithme 35
5 Fonctions trigonométriques 36
6 Fns trigonométriques réciproques 37
7 Fns cosinus et sinus hyperboliques . . . 38
8 Fonction tangente hyperbolique 39
9 Fns Argch et Argsh 39
10 Fn Argument tangente hyperbolique . . 40
11 Cercle trigonométrique 42
12 Intégrale double 49
13 Intégrale triple 50
14 Intégrale double en polaires 51
15 Intégrale triple en cylindriques 52
16 Intégrale triple en sphériques 52
17 Critère spécial des séries alternées . . . 54
18 Comparaison série-intégrale 55
19 Convergence d'une série entière 56
20 Fonction convexe 74
21 Etude locale d'une courbe paramétrée . 75
22 Exemple de ρ négatif en polaires 77
23 Tangente en polaires 77
24 Asymptote en polaires 78
25 Repère de Frenet et centre de courbure . 79
26 Plan tangent 81
27 Ellipse : foyers et directrices 83
28 Parabole : foyers et directrices 84
29 Hyperbole : foyers et directrices 86
30 Quadriques 88
31 Surface de révolution : axe et directrice . 90
32 Cylindre : direction et directrice 91
33 Contour apparent dans une direction . . 92
34 Cône : sommet et directrice 92
35 Contour apparent depuis un point . . . 93

Tableaux

1 Fonctions usuelles 41
2 Primitives usuelles 45
3 Séries Entières usuelles 58

Première partie

Algèbre

1. Théorie des ensembles

1.1. Ensembles

Un ensemble peut se définir par

- la liste de ses éléments, comme par exemple : $E = \{1,2,\ldots,n\}$;
- la propriété que vérifient ses éléments, par ex. : $E = \{x \in \mathbb{R}, x^2 + x - 1 = 0\}$.

Quand x est un élément de E, c'est à dire qu'il est dans la liste des éléments de E, ou qu'il vérifie la propriété caractéristique de E, on dit que x **appartient** à E, noté : $x \in E$.

Définition : Si E et F sont deux ensembles, on appelle l'**ensemble produit** de E et F, noté $E \times F$, l'ensemble des couples d'un élément de E et d'un élément de F, soit : $E \times F\{(x,y), \quad x \in E, y \in F\}$

L'ensemble vide se note : $\emptyset$.

1.2. Sous-ensembles

On dit que F est **inclus** dans E, noté $F \subset E$, $\Leftrightarrow \forall x \in F, \quad x \in E$.
F est ainsi un sous-ensemble de E, ou une partie de E.
On note $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E. C'est ensemble de tous les sous-ensembles de E.

Définition : L'**intersection** de 2 ensembles A et B, notée $A \cap B$ est : $A \cap B = \{x, x \in A \text{ et } x \in B\}$

Définition : La **réunion** de 2 ensembles A et B, notée $A \cup B$ est : $A \cup B = \{x, x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Définition : Si $A \subset B$, le **complémentaire** de A dans B est : $\complement_B A = \{x, x \in B \text{ et } x \notin A\}$.

1.3. Loi de composition interne

Définition : Si E est un ensemble, une **loi de composition interne**, notée $*$, sur E est une application (voir page 8) définie sur $E \times E$ et à valeur dans E.
A deux éléments de E, on associe un troisième élément de E.
On note une loi de composition interne sous forme d'opération plutôt que sous forme d'application : $z = x * y$.

Les propriétés usuelles d'une loi $*$ de composition interne sur E sont :

associativité : $\forall x,y,z \in E, \quad (x * y) * z = x * (y * z)$
En un mot, on peut, dans un calcul, regrouper les termes comme on veut, sans changer leur ordre.

> Il est pratiquement impossible de travailler avec une loi qui n'est pas associative.

commutativité : $\forall x,y \in E, \quad x * y = y * x$
Pour une loi commutative, dans un calcul, on peut changer l'ordre des termes.

élément neutre : e est élément neutre $\Leftrightarrow \forall x \in E, \quad x * e = e * x = x$
C'est par exemple 0 pour l'addition et 1 pour la multiplication.

élément inversible : x est inversible, ou possède un symétrique $\Leftrightarrow \exists x' \in E$ tel que : $x * x' = x' * x = e$
Ceci n'a bien sûr de sens que si la loi $*$ possède déjà un élément neutre e.

1.4. Ensembles finis

Définition : Un ensemble est **fini** s'il est vide ou s'il peut se mettre en bijection (voir page 8) avec $\{1,2,\dots,n\}$.
Son **cardinal**, qui est son nombre d'éléments, est alors n.
Le **cardinal** de l'ensemble vide est 0.

Notation : L'ensemble $\{1,2,\dots,n\}$ se note aussi $[\![1,n]\!]$.

Théorème :

- $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$
- Le cardinal de l'ensemble des parties de E est : $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{Card}(E)}$
- Le cardinal de l'ensemble des applications de E dans F (voir page 9) est : $\text{Card}(\mathcal{F}(E,F)) = \text{Card}(F)^{\text{Card}(E)}$
- Le cardinal de l'ensemble des parties à p éléments d'un ensemble à n éléments est : $C_n^k = \binom{n}{k}$

2. Fonctions et applications

2.1. Applications

Définition : Une **fonction** f de E vers – ou dans – F est une relation telle que :
$\forall x \in E$, il existe au plus un seul $y \in F$, tel que : $y = f(x)$.
Une **application** f de E vers – ou dans – F est une relation telle que :
$\forall x \in E$, il existe un et un seul $y \in F$, tel que : $y = f(x)$.

Définition : Soit f une application de E vers F, et A une partie de E,
alors : $f_A : A \to F$, définie par : $\forall x \in A$, $f_A(x) = f(x)$ est la **restriction** de f à A.

Définition : Soit g une application de A vers F, et A une partie de E,
alors, toute application : $f : E \to F$, telle que : $\forall x \in A$, $f(x) = g(x)$ est **un prolongement** de g sur E.

2.2. Image, image réciproque d'une partie

Définition : Soit f une application de E vers F,

- si A est une partie de E, on appele **image** – ou image directe – de A par f,
  notée $f(A) = \{y \in F, \quad \exists x \in A \text{ tel que : } y = f(x)\}$.
  C'est l'ensemble des images des éléments de A ;
- si B est une partie de F, on appele **image réciproque** de B par f,
  notée $f^{-1}(B) = \{x \in E, \quad \text{tels que : } f(x) \in B\}$.
  C'est l'ensemble des éléments de E dont l'image est dans B.

> On peut parler de l'image réciproque d'une partie B, notée $f^{-1}(B)$ même quand l'application f^{-1} n'existe pas...

2.3. Injection, surjection, bijection

Définition : Une application est **injective** si et seulement si deux éléments distincts ont des images distinctes.
En pratique, on montre que : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Définition : Une application est **surjective** si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède un antécédant, c'est à dire : $\forall y \in F, \quad \exists x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Définition : Une application est **bijective** si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède un unique antécédant, c'est à dire : $\forall y \in F$, il existe un et un seul $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Définition : Si f est une bijection de E sur F, alors : $z = f^{-1}(t) \Leftrightarrow f(z) = t$, définit bien une application f^{-1}, de F sur E, bijective, appelée **application réciproque** de f.

2.4. Composition des applications

Définition : Soit : $f : E \to F$ et : $g : F \to G$, on définit la **composée** de f et g, comme étant l'application : $g \circ f : E \to G$, telle que : $g \circ f(x) = g(f(x))$.

> En général : $g \circ f \neq f \circ g$... même quand tous les deux sont définis !

Théorème : On prend : $f : E \to F$ et : $g : F \to G$, alors :

- si f et g sont surjectives, $g \circ f$ est surjective.
- si f et g sont injectives, $g \circ f$ est injective.
- si f et g sont bijectives, $g \circ f$ est bijective.

Théorème : La composée des applications est toujours associative. C'est à dire :
Si on a : $f : E \to F$, $g : F \to G$, et : $h : G \to H$, $\quad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

> L'application « identité » : $Id_E : E \to E$, qui à x associe x est une bijection, et est élément neutre pour la composition des applications.

Théorème : Si f est une bijection de E dans F, on a bien sûr : $\quad f^{-1} \circ f = Id_E$, l'identité de E ; et on a aussi : $f \circ f^{-1} = Id_F$.

2.5. Ensemble des applications de E vers F

Définition : L'ensemble des applications de E vers F est noté : $\mathcal{F}(E,F)$.

Si E et F sont des ensembles finis, alors, $\mathcal{F}(E,F)$ est aussi fini.

3. Structure de Groupe

3.1. Groupe

Définition : $*$ étant une loi de composition interne, c'est à dire : $\quad \forall a,b \in G, \quad a * b \in G$

$$(G,*) \text{ est un } \textbf{groupe} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a,b,c \in G, & (a*b)*c = a*(b*c) \\ \exists e \in G, \quad \forall a \in G, & a*e = e*a = a \\ \forall a \in G, \quad \exists a' \in G, & a*a' = a'*a = e \end{cases}$$

Il s'agit de l'associativité, de l'existence d'un élément neutre, et de l'existence d'un symétrique pour tout élément.
Si, de plus la loi est commutative, le groupe est dit abélien ou commutatif.
Remarquons qu'un groupe est non vide... puisqu'il contient l'élément neutre.

3.2. Sous-groupe

Théorème : $H \subset G$ est un **sous-groupe** de $(G,*) \Leftrightarrow \begin{cases} H \text{ est non vide} \\ \forall a,b \in H, \quad a * b' \in H \end{cases}$

> En pratique, il est bien plus facile de montrer qu'on a un sous-groupe d'un groupe connu plutôt qu'un groupe.

3.3. Morphisme de groupe

Définition : $f : (F,*) \to (G,\circ)$ est un **morphisme de groupe** $\Leftrightarrow \forall a,b \in F, \quad f(a*b) = f(a) \circ f(b)$

4. Structure d'Anneau

4.1. Anneau

Définition : Un **anneau** est un ensemble A muni de deux lois de composition interne notées $+$ et $\cdot$ telles que :

- $(A,+)$ a une structure de groupe commutatif ;
- la loi $\cdot$ est associative, possède un élément neutre et est distributive par rapport à l'addition.

Cet anneau est dit commutatif quand la loi $\cdot$ est commutative.

4.2. Sous-anneau

Théorème : B est un sous-anneau de $(A,+,\cdot) \Leftrightarrow \begin{cases} B \text{ est un sous-groupe de } (A,+) \\ B \text{ est stable pour } \cdot \\ 1 \in B \end{cases}$

4.3. Exemples d'anneaux

$(\mathbb{Z},+,\cdot)$ a une structure d'anneau commutatif.
Par ailleurs, toutes les algèbres qui suivent, page ci-contre, ont, bien sûr, une structure d'anneau.

4.4. Arithmétique de $\mathbb{Z}$

a/ Multiples et diviseurs

Définition : Soient a et b dans $\mathbb{Z}$, tels qu'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que : $a = b\,q$.
On dit alors que a est un **multiple** de b, ou que a est **divisible** par b.
On dit aussi que b est un **diviseur** de a.

b/ Division Euclidienne

Théorème : Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, alors, il existe un **unique** couple (q,r) avec $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ tel que : $a = b\,q + r$.

> Si $a \in \mathbb{N}$, il s'agit simplement de la division de l'école primaire !
> Mais, si $a < 0$, et d'ailleurs dans tous les cas, q est la partie entière (voir page 12) de $\frac{a}{b}$.

> On peut toujours faire la division euclidienne de a par $b \neq 0$, mais, il n'y a que quand le reste est nul que a est divisible par b !

c/ Nombres premiers

Définition : Un **nombre premier** a de $\mathbb{N}^*$ est un entier a qui n'est divisible, dans $\mathbb{N}$, que par lui même et par 1.
Un **nombre premier** a de $\mathbb{Z}^*$ est un nombre tel que $|a|$ est un nombre premier de $\mathbb{N}^*$.

Théorème : Tout entier a de $\mathbb{N}^*$ est décomposable **de façon unique** en produit de nombres premiers de $\mathbb{N}^*$.
Tout entier a de $\mathbb{Z}^*$ est décomposable **de façon unique** en produit de nombres premiers de $\mathbb{N}^*$ et du signe de a.

Exemple : $-360 = -1 \times 2^3 \times 3^2 \times 5$

La décomposition en produit de nombres premiers permet d'effectuer facilement :

- les simplifications de fractions ;
- la somme de deux fractions, on prend alors comme nouveau dénominateur le nombre obtenu en prenant dans chacun des dénominateurs chaque facteur premier avec l'exposant le plus grand.

5. Structure de Corps

5.1. Corps

Définition : Un **corps** $\mathbb{K}$ est un ensemble muni de deux lois de composion interne telles que :

- $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ est un anneau :
- tout élément x de $\mathbb{K}^*$ possède un inverse $\dfrac{1}{x}$ pour la loi $\cdot$

5.2. Corps usuels

Les corps usuels sont $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ notés $\mathbb{K}$ quand c'est l'un ou l'autre, plus exceptionnellement $\mathbb{Q}$.

6. Structure d'Algèbre

6.1. Algèbre

Une **algèbre** est un ensemble A muni de trois lois.
Les deux premières lui confèrent la structure d'espace vectoriel $(A, +, .)$. La troisième loi est une loi de composition interne appelée **produit**. Cette loi $\times$ est associative, possède un élément neutre, et est distributive par rapport à l'addition.
C'est à dire qu'on a, à la fois, une structure d'espace vectoriel $(A, +, .)$ et d'anneau $(A, +, \times)$.
Enfin, dernière propriété, les deux « produits » sont « compatibles » :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall a,b \in A, \quad (\lambda \,.\, a) \times b = a \times (\lambda \,.\, b) = \lambda \,.\, (a \times b)$$

6.2. Sous-algèbre

On montre le plus souvent qu'on a une sous-algèbre d'une algèbre connue plutôt que de montrer qu'on a une algèbre directement.

Théorème : $F \subset E$ est une **sous-algèbre** de $E \Leftrightarrow \begin{cases} & 1 \in F \\ \forall u,v \in F, \quad \forall \lambda,\mu \in \mathbb{K}, & (\lambda.u + \mu.v) \in F \\ \forall u,v \in F, & u \times v \in F \end{cases}$

C'est à dire, F contient l'identité, est stable par combinaison linéaire et par produit.

6.3. Algèbres usuelles

- $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ sont des algèbres sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.
- $\mathcal{C}^k(A, \mathbb{R})$ avec A non vide et $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est une algèbre sur $\mathbb{R}$.
- $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E.
  La loi de composition interne, c'est à dire le « produit », étant ici la composition « $\circ$ » des applications.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensembles des matrices carrées $n \times n$

7. Nombres Réels

7.1. Inégalités, Bornes

On rappelle l'inégalité triangulaire : $\forall x,y \in \mathbb{R}, \quad |x+y| \leqslant |x| + |y|$.

Définition : Soit A une partie, non vide, de $\mathbb{R}$ majorée, la **borne supérieure** de A est le plus petit des majorants de A.
Si A est une partie, non vide, de $\mathbb{R}$ minorée, la **borne inférieure** de A est le plus petit des minorants de A.

Théorème : Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure, et toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Notation : On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$

> Cela ne rend pas $-\infty$ et $+\infty$ réels !

Théorème : Tout intervalle réel non vide et non réduit à un point contient une infinté de nombres rationels et une infinité de nombres irrationels.

7.2. Partie entières

Définition : La partie entière d'un nombre réel est le plus grand des entiers qui lui sont plus petits.

Ainsi : $\text{Ent}(\pi) = 3$, et : $\text{Ent}(-\pi) = -4$.
On a :

$$\text{Ent}(x) \leqslant x < \text{Ent}(x) + 1$$

Définition : La valeur décimale approchée à 10^{-n} près par défaut de x est : $\dfrac{\text{Ent}(x \times 10^n)}{10^n}$.

La valeur décimale approchée à 10^{-5} près par défaut de π est : 3,14159.

7.3. Formule du Binôme

a/ Coefficients binomiaux

Définition : $C_n^k = C_n^{n-k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k \qquad C_n^0 = C_n^n = 1 \qquad C_n^1 = C_n^{n-1} = n \qquad C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

On notera bien que la notation C_n^k est de plus en plus remplacée par la notation : $\binom{n}{k}$.
Remarquons l'inversion de n et k.

b/ Formule du Binôme et autres

Théorème : $\forall a,b \in \mathbb{K}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^k \, b^{n-k}$

Théorème : $\forall a,b \in \mathbb{K}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=1}^{n} a^{n-k} \, b^{k-1}\right)$

> Les deux formules précédentes sont en fait valables **dans tout anneau commutatif** et donc, en particulier, dans toute algèbre comutative.
> Quand on n'a pas la commutaivité du produit, il faut et il suffit que le produit des deux éléments concernés commute.
> Ce sera le cas avec les matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, voir page 24, et avec l'ensemble des endomorphismes de E, c'est à dire $\mathcal{L}(E)$.

Théorème : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$

8. Nombres Complexes

8.1. Nombres Complexes

$$z = x + iy = \rho e^{i\theta} \qquad \overline{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta} \qquad \rho = |z| = |-z| = |\overline{z}| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'} \qquad \overline{z\,z'} = \overline{z}\,\overline{z'} \qquad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}} \qquad |z|^2 = z\,\overline{z}$$

8.2. Inégalité triangulaire

Théorème : $\forall x,y \in \mathbb{C}, \quad \Big||x| - |y|\Big| \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|$

> Cette inégalité est, bien sûr, encore valable lorsque x et y sont réels...

8.3. Groupe des unités

Théorème : L'ensemble U des nombres complexes de module 1, muni de la multiplication, a une structure de groupe commutatif.

8.4. Racines d'un nombre complexe

a/ Racines carrées

Théorème : $z^2 = a + ib \quad$ avec $\quad z = x + iy \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ \text{signe}(xy) = \text{signe}(b) \end{cases}$

b/ Racines $n^{èmes}$ de l'unité

Théorème : $z^n = 1 \Leftrightarrow z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$

c/ Racines $n^{èmes}$ d'un nombre complexe

Théorème : $z^n = \rho e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \sqrt[n]{\rho}\, e^{\frac{i\theta+2ik\pi}{n}} \quad$ avec $\quad k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$

> Les racines $n^{èmes}$ d'un complexe s'obtiennent en effectuant le produit de l'une d'entre elles par les racines $n^{èmes}$ de l'unité.

8.5. Géométrie du plan complexe

a/ Transformations

- $z \mapsto a\,z$
  Si le point M est d'affixe z, on trouve le point M' d'affixe $a\,z$ en effectuant la rotation de centre O, d'angle $\arg a$ et l'homothétie de centre O et de rapport $|a|$.
- $z \mapsto a\,z + b$
  Si le point M est d'affixe z, on trouve le point M' d'affixe $a\,z + b$
  - en effectuant la rotation de centre Ω, d'angle $\arg a$ et l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$. Ω est le point fixe d'affixe vérifiant : $z = a\,z + b$, dans le cas où $a \neq 1$;
  - dans le cas où $a = 1$, le point M' est le translaté de M de vecteur d'affixe b.

  peut aussi se reporter à la page 72.

- $z \mapsto \dfrac{1}{z}$

  Si le point M est d'affixe z, le point M' d'affixe $\dfrac{1}{z}$ se trouve sur la droite, orientée, symétrique de (OM) par rapport à Ox, la norme de $\overrightarrow{OM'}$ étant l'inverse de celle de $\overrightarrow{OM}$.
- $z \mapsto \overline{z}$

  Si le point M est d'affixe z, le point M' d'affixe $\overline{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe Ox.

b/ Cercles et droites

Théorème : A,B,M d'affixes respectives a,b,z, alors :

- le module de $\dfrac{z-a}{z-b}$ est : $\dfrac{\left\|\overrightarrow{AM}\right\|}{\left\|\overrightarrow{BM}\right\|}$;
- l'argument de $\dfrac{z-a}{z-b}$ est : $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}\right)$

9. Polynômes

9.1. Racines

Soit le polynôme : $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

Théorème : Sur $\mathbb{C}$, $P(x) = a_n (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$

Théorème : Sur $\mathbb{R}$, $P(x) = a_n (x-x_1)(x-x_2)\dots\left(x-x_p\right)\left(x^2+\alpha_1 x+\beta_1\right)\dots\left(x^2+\alpha_m x+\beta_m\right)$
avec $p+2m=n$ et toutes les expressions du second degré irréductibles, c'est à dire $\Delta < 0$.

> Quand on a tous les facteurs d'un polynôme, pour retrouver celui-ci, il ne faut pas oublier le coefficient dominant a_n.

Définition : Un polynôme est dit **scindé** si et seulement si il est factorisable en produit d'expressions du premier degré.

> Sur $\mathbb{C}$ un polynôme est donc toujours scindé.
> Sur $\mathbb{R}$, il faut et il suffit qu'il n'ait pas de racines complexes non réelles.

Théorème : $P(x)$ est divisible par $(x-\alpha) \Leftrightarrow P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha$ est racine de P

Théorème : $P(x)$ est divisible par $(x-\alpha)^k \Leftrightarrow P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$
$\Leftrightarrow \alpha$ est racine d'ordre k au moins de P

Théorème : Un polynôme de degré n qui a au moins $n+1$ racines distinctes ou confondues est nul.

Théorème : Si P est scindé, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$, $x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}$

> Pour le degré 2, $x^2 - Sx + P = 0$ est tel que : $S = x_1 + x_2$, et $P = x_1\, x_2$
> S est la somme des racines et P leur produit.

9.2. Division Euclidienne

Théorème : Soit A et B deux polynômes, $B \neq 0$,

alors il existe un unique couple (Q,R) tel que $\begin{cases} A = BQ + R \\ \text{degré}(R) < \text{degré}(B) \end{cases}$

En pratique, quand on écrit la division de A par B, on prendra soin de bien écrire les polynômes par puissances décroissantes.

> $P|Q \Leftrightarrow$ Le reste de la division euclidienne de Q par P est nul
> $\Leftrightarrow$ Toutes les racines de P sont racines de Q avec au moins le même ordre de multiplicité.
> On pensera à cette dernière équivalence quand le degré de P est petit ...

10. Fractions Rationnelles

10.1. Décomposition en éléments simples

Théorème : $A = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationelle irréductible avec $Q(x) = a\,(x-x_1)^{p_1}\,(x-x_2)^{p_2}\ldots(x-x_n)^{p_n}$

Alors : $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{p_k}\dfrac{A_{k,l}}{(x-x_k)^l}\right)$

avec $E(x)$ le quotient de la division euclidienne de P par Q.

En pratique, sur les réels et les complexes,

- un terme en $(x-x_1)$ dans $Q(x)$ donne un terme en $\dfrac{A}{(x-x_1)}$,
- un terme en $(x-x_1)^2$ dans $Q(x)$ donne un terme en $\dfrac{A}{(x-x_1)} + \dfrac{B}{(x-x_1)^2}$ (première espèce).

Sur les réels,

- un terme en $\left(x^2+\alpha_1 x+\beta_1\right)$ avec $(\Delta<0)$ donne :
  - un terme en $\dfrac{A}{(x-x_1)} + \dfrac{\overline{A}}{(x-\overline{x_1})}$
  - ou directement en $\dfrac{Cx+D}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)}$ (seconde espèce), avec C et D réels.

Exemple : On va donner un exemple de décomposition directe en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

Soit : $\dfrac{2X+1}{(X+1)^2(X^2+X+1)} = \dfrac{A}{X+1} + \dfrac{B}{(X+1)^2} + \dfrac{CX+D}{X^2+X+1}$ car X^2+X+1 n'a pas de racines réelles, ses racines sont j et $\overline{j}$.

Pour B, on multiple par $(X+1)^2$, on simplifie et on fait $X=-1$. Cela donne : $B=-1$.

Pour C et D, qu'on peut trouver en même temps, car la fraction rationelle du départ est réelle, on multiplie par X^2+X+1, on simplifie et on fait $X=j$. Comme C et D sont réels, on a les deux.

$Cj+D = \dfrac{2j+1}{(j+1)^2} = \dfrac{2j+1}{(-j^2)^2} = \dfrac{2j+1}{j} = 2+j^2 = 2-1-j = 1-j$, d'où : $C=-1$ et $D=1$.

Pour A, on fait $X=0$ ou bien on multiplie par X et on fait $X=+\infty$. Ce qui donne : $A+C=0$ et donc : $A=1$.

10.2. Conseils pratiques

Pour décomposer une fraction rationelle en éléments simples, il faut :

- Factoriser $Q(x)$.
- Ecrire la forme générale de la décomposition, en n'oubliant pas la partie entière, qu'on calcule en faisant la division euclidienne
- Utiliser la parité-imparité qui réduit souvent beaucoup l'étude
- Terme de degré dominant :
  - multiplier par $(x-x_1)^{p_1}$, simplifier puis poser $x=x_1$

- racine simple de première espèce : faire le précédent ou bien : $A = \dfrac{P(x_1)}{Q'(x_1)}$

- Résidu à l'infini : multiplier par x et calculer la limite quand $x \to \infty$
- Enfin, prendre une valeur ...

11. Espaces Vectoriels

11.1. Structure d'espace vectoriel

Définition : $(E,+,.)$ est un **espace vectoriel** sur $\mathbb{K} \Leftrightarrow \begin{cases} (E,+) \text{ est un groupe commutatif} \\ \begin{cases} \forall u,v \in E \\ \forall \lambda,\mu \in \mathbb{K} \end{cases} \begin{cases} \lambda.(u+v) = \lambda.u + \lambda.v \\ (\lambda+\mu).u = \lambda.u + \mu.u \\ \lambda.(\mu.u) = \lambda\mu.u \\ 1.u = u \end{cases} \end{cases}$

Définition : On appelle **vecteurs** les éléments de E et **scalaires** les éléments de $\mathbb{K}$.

> Un espace vectoriel E possède une structure de groupe additif, l'élément neutre pour l'addition est le vecteur nul, noté 0_E ou simplement 0. On prendra soin de ne pas le confondre avec le scalaire 0 ...

On peut aussi montrer que F est un sous-espace vectoriel de E en montrant :

- que F est le noyau d'une certaine application linéaire ;
- ou que F est défini comme engendré par une certaine famille de vecteurs.

11.2. Sous-espace vectoriel

Théorème : $F \subset E$ est un **sous-espace vectoriel** de $E \Leftrightarrow \begin{cases} F \text{ est non vide} \\ \forall u,v \in F, \quad \forall \lambda,\mu \in \mathbb{K}, \quad (\lambda.u + \mu.v) \in F \end{cases}$

C'est à dire F est non vide et stable par combinaison linéaire.

> Ce théorème sert souvent pour montrer que F est un espace vectoriel en montrant qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace connu et identifié...

11.3. Somme de sous-espaces vectoriels

Définition : $E = E' + E'' \Leftrightarrow$ tout vecteur x de E est somme d'un vecteur x' de E' et d'un vecteur x''de E''

On a la même définition pour la somme de plus de deux sous-espaces vectoriels.

Définition : $E' + E''$ est **directe** $\Leftrightarrow E' \cap E'' = \{0\} \Leftrightarrow$ les composantes x' et x'' de x sont uniques.
La somme directe des deux sous-espaces est alors notée $E' \oplus E''$.

Définition : On dit que les sous-espaces E' et E'' sont **supplémentaires** dans $E \Leftrightarrow E = E' \oplus E''$

Théorème : $E = E' \oplus E'' \Leftrightarrow \begin{cases} E = E' + E'' \\ E' \cap E'' = \{0\} \end{cases}$
On a un autre théorème en dimension finie au 11.5..

Exemple : Donnons deux exemple, l'un en dimension finie et l'autre en dimension infinie :

- dans l'ensemble des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble $\mathcal{S}$ des matrices symétriques et l'ensemble $\mathcal{I}$ des matrices anti-symétriques sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires ;
- dans l'ensemble des applications $\mathcal{A}([-a,a],\mathbb{K})$, l'ensemble $\mathcal{P}$ des applications paires et l'ensemble $\mathcal{I}$ des applications impaires sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

11.4. Norme sur un espace vectoriel

Définition :

$$\begin{cases} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ u & \mapsto & \|u\| \end{cases} \text{ est une norme } \Leftrightarrow \begin{cases} \forall u,v \in E, & \|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\| & \text{(inégalité triangulaire)} \\ \forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, & \|\lambda.u\| = |\lambda|\,\|u\| & \text{(positive homogénéité)} \\ \forall u \in E, & \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0 & \text{(séparation)} \end{cases}$$

11.5. Espaces vectoriels de dimension finie : base

Définition : $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est **génératrice** de E $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E, \quad \exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \\ x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n \end{cases}$

Définition : $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est **libre** de E $\Leftrightarrow (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0)$

Définition : Une **base** est une famille libre et génératrice.

Définition : Un espace vectoriel est dit de **dimension finie** $\Leftrightarrow$ il possède une base comptant un nombre fini de vecteurs. Sa dimension est alors le nombre de vecteurs de cette base.

Théorème : Toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs qui est, par définition, la dimension de E.

Théorème : Si E est de dimension n :
$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une base $\Leftrightarrow$ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ libre $\Leftrightarrow$ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ génératrice

Définition : Le **rang** d'une famille de vecteurs est la dimension de l'espace vectoriel engendré par ces vecteurs.

Théorème :

$$E' \text{ et } E'' \text{ sont } \textbf{supplémentaires} \text{ de } E \Leftrightarrow E = E' \oplus E'' \Leftrightarrow \begin{cases} E', E'' \text{ deux sous-espaces vectoriels de } E \\ \dim(E) = \dim(E') + \dim(E'') \\ E' \cap E'' = \{0\} \end{cases}$$

Remarquons qu'on peut remplacer la condition $E' \cap E'' = \{0\}$ par $E = E' + E''$
On a un autre théorème en dimension infinie au 11.3..

11.6. Espaces vectoriels usuels

- $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, de dimension infinie.
- $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{C}_n[X]$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, de dimension $n+1$, de base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$.
- $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, de dimension n. Les vecteurs de la base canonique ont une composante égale à 1 et les autres composantes nulles.
- $\mathcal{A}(A, E)$ avec A non vide et E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{C}^k(A, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^k(A, \mathbb{C})$ avec A non vide et $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, respectivement.
  - Sur A symétrique par rapport à l'origine, les applications paires et les applications impaires sont des sous-espaces vectoriels des précédents.
  - Sur un ensemble allant jusque $+\infty$ ou $-\infty$, les applications tendant vers 0 à l'infini forment aussi un sous-espace vectoriel des précédents.
  - Il en est de même des applications bornées sur A...
- L'ensemble des suites réelles ou complexes ont une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, respectivement.
  - Les suites réelles ou complexes tendant vers 0 à l'infini forment des sous espaces vectoriels des précédents.

- Il en est de même des suites bornées...

- $\mathcal{V}ect(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de l'espace dans lequel se trouvent les vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
  On l'appelle l'espace vectoriel engendré par $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
  Il est de dimension n si et seulement si ces vecteurs forment une famille libre.
- $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}(E)$ les ensembles d'applications linéaires de E dans F ou de E dans E.
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ les ensembles de matrices n lignes, p colonnes ou carrées $n \times n$, de dimensions respectives $n\,p$ et n^2. Les vecteurs de la base canoniques sont les matrices qui ont un élément égal à 1 et les autres nuls.

12. Applications Linéaires

12.1. Applications linéaires

Définition : $f : E \to F$, avec E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ est **linéaire**, ou est un **morphisme**, ou encore un **homomorphisme** $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall u,v \in E \\ \forall \lambda,\mu \in \mathbb{K} \end{cases} f(\lambda.u + \mu.v) = \lambda.f(u) + \mu.f(v)$
$f : E \to E$, linéaire est un **endomorphisme**
$f : E \to F$, linéaire bijective est un **isomorphisme**
$f : E \to E$, linéaire bijective est un **automorphisme**
$f : E \to \mathbb{K}$, linéaire est une **forme linéaire**. $\mathbb{K}$ est ici considéré comme un espace vectoriel sur lui-même.

Théorème : $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}(E)$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.
Si E et F sont de dimension finies n et p, la dimension de $\mathcal{L}(E,F)$ est $n \times p$ et celle de $\mathcal{L}(E)$ est n^2

12.2. Sous espace vectoriel stable par un endomorphisme

Définition : Soit F un sous espace vectoriel de E et f un endomorphisme de E.
On dit que F est stable par $f \Leftrightarrow \forall u \in F, \quad f(u) \in F$.

12.3. Image et noyau

Définition : Le **noyau** de f, linéaire, est : $\ker(f) = \{u \in E, \quad f(u) = 0\}$.

Définition : L'**image** de f, linéaire, est : $\mathrm{Im}(f) = \{v \in f, \quad \exists u \in E, \quad v = f(u)\}$.

Théorème : L'image d'un s.e.v de E / L'image de E } par $f : E \to F$, linéaire, est un sous-espace vectoriel de F.

Théorème : L'image réciproque d'un s.e.v de F par $f : E \to F$, linéaire, est un sous-espace vectoriel de E.

Théorème : Le noyau de $f : E \to F$, linéaire, est un sous-espace vectoriel de E.

Théorème : $f : E \to F$, linéaire, est injective $\Leftrightarrow \ker(f) = \{0\}$

En dimension finie, des bases étant choisies,

- on recherche le noyau en résolvant un système linéaire sans second membre, la dimension du noyau est la dimension de l'espace de départ moins le rang du système, c'est aussi le nombre d'inconnues auxiliaires. On obtient une base du noyau en distribuant tour à tour un 1 et des 0 sur les inconnues auxiliaires ;
- on recherche l'image en écrivant que les images des vecteurs de la base forment une famille génératrice de l'image, puis en otant les vecteurs inutiles de cette famille. La dimension de l'image est le rang de l'application linéaire, de la matrice.

12.4. Projecteur

Définition : $p : E \to E$ est un **projecteur** $\Leftrightarrow p \circ p = p$

Théorème : $p : E \to E$ est un projecteur $\Rightarrow E = \text{Im}(p) \oplus Ker(p)$,
mais ceci n'est pas une équivalence.

> $E = E_1 \oplus E_2$ permet de définir p la projection sur E_1, parallèlement à E_2 et q la projection sur E_2, parallèlement à E_1.
> On a alors $p + q = Id$.

12.5. Théorème du rang

Définition : $f : E \to F$, linéaire, avec E de dimension finie,
le **rang de** f est $\text{rg}\,(f) = \dim(f(E)) = \dim(Im(f))$.

Théorème : $f : E \to F$, linéaire, avec E de dimension finie $\Rightarrow \dim(E) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}\,(f)$

Théorème : $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$ et $\dim(\mathcal{L}(E)) = \dim(E)^2$

Théorème : Si $\dim(E) = \dim(F)$, et donc en particulier dans le cas d'un endomorphisme en dimension finie,

on a :
- f bijective
- $\Leftrightarrow \ker(f) = \{0\}$
- $\Leftrightarrow \text{Im}\,(f) = F$
- $\Leftrightarrow f$ injective
- $\Leftrightarrow f$ surjective
- $\Leftrightarrow f$ transforme une base de E en une base de F
- $\Leftrightarrow f$ transforme toute base de E en une base de F

12.6. Système linéaire

Pour résoudre un système linéaire de n équations à p inconnues :

- On rend le système trapézoïdal en appliquant la méthode du pivot de Gauss
- S'il y a des paramètres, on ne discute que lorsqu'on y est obligé pour appliquer le pivot de Gauss, au besoin en changeant l'ordre des lignes ou des colonnes.
  - On connait à ce moment le rang du système : c'est le nombre d'équations linéaires indépendantes. Si le système est sans second membre, l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension le nombre d'inconnues moins le rang.
  - On voit à ce moment si le système est incompatible.
  - S'il est compatible, le rang du système est le nombre d'équations restantes
    - Si on a, à ce moment, autant d'équations que d'inconnues : le système a une solution unique
    - Si on a, à ce moment, moins d'équations que d'inconnues, on garde autant d'inconnues principales que le rang. Les autres deviennent des inconnues auxiliaires, qui se traitent comme des paramètres.

13. Matrices

13.1. Généralités

a/ Produit de matrices

Si A est une matrice n-lignes et m-colonnes, B une matrice m-lignes et p-colonnes,

alors : $C = AB$ est une matrice n-lignes et p-colonnes vérifiant : $\quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\, b_{kj}$.

Ce qui se schématise : $\left(\begin{array}{ccc} \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline a_{i1} & \cdots & a_{im} \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c|c} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{mj} & \vdots \end{array}\right) = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$

b/ Produit de matrices définies par blocs

Si deux matrices sont définies par blocs, on peut parfois effectuer leur produit en travaillant par blocs. C'est à dire :

$$\begin{pmatrix} (A) & (B) \\ (C) & (D) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (A') & (B') \\ (C') & (D') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A)\times(A')+(B)\times(C') & (A)\times(B')+(B)\times(D') \\ (C)\times(A')+(D)\times(C') & (C)\times(B')+(D)\times(D') \end{pmatrix}$$

Les dimensions des matrices doivent être compatibles, à savoir :
- Le nombre de **colonnes** de A et C doit être le nombre de **lignes** de A' et B'.
- Le nombre de **colonnes** de B et D doit être le nombre de **lignes** de C' et D'.

D'autre part, rappelons que le produit de matrices n'est pas commutatif, l'ordre dans lequel on écrit ces produits est donc fondamental...

c/ Transposée d'un produit

Théorème : On a : $\quad {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

13.2. Généralités sur les matrices carrées

a/ Matrices symétriques et antisymétriques

Définition : Une matrice carré M est symétrique $\Leftrightarrow {}^tM = M \Leftrightarrow a_{ji} = a_{ij}$

Définition : Une matrice carré M est anti-symétrique $\Leftrightarrow {}^tM = -M \Leftrightarrow a_{ji} = -a_{ij}$

Théorème : Le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques sont supplémentaires.
De plus : $\quad M_S = \dfrac{M + {}^tM}{2}$ est toujours symétrique, et $\quad M_A = \dfrac{M - {}^tM}{2}$ est antisymétrique.
Elles vérifient : $\quad M = M_S + M_A$.

En dimension 3, la matrice symétrique la plus générale est : $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$
et la matrice antisymétrique la plus générale possible est : $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$

b/ Inverse d'une matrice

Théorème : Si on a M une matrice carrée telle que : $\quad M\,M' = I_n$, $\quad$ ou telle que : $\quad M'\,M = I_n$,
alors M est inversible et $M^{-1} = M'$.

Théorème : Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Calcul pratique :
En général, on inverse une matrice carrée en inversant le système linéaire correspondant avec un second membre arbitraire : $\quad Y = MX \Leftrightarrow X = M^{-1}Y$

Cependant, parfois, quand la question est plus théorique, on peut utiliser le théorème suivant :

Théorème : M, une matrice inversible, Δ son déterminant et Δ_{ij} le déterminant obtenu en enlevant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne, alors :

$$M^{-1} = \frac{1}{\Delta} \times \text{transposée de } \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & (-1)^{i+j}\Delta_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

c/ Inverse d'un produit

Théorème : On a : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

d/ Inversion et Transposition

Théorème : A une matrice carrée inversible, alors : ${}^t\left(A^{-1}\right) = \left({}^tA\right)^{-1} = {}^tA^{-1}$.

13.3. Matrice d'une application linéaire

Définition : $f : E \to F$, linéaire, avec E et F de dimensions finies n et p, munis de bases $\mathcal{B}_E = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}_F = (e'_1, \ldots, e'_p)$, on appelle **matrice de f dans ces bases** $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}$ la matrice p lignes et n colonnes dont l'élément $a_{i,j}$, $i^{ème}$ ligne et $j^{ème}$ colonne est tel que $f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j}\, e'_i$.

On a en colonnes, les coordonnées des images des vecteurs de la base de E écrits dans la base de F.

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \ldots & a_{i,j} & \ldots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \ldots & a_{p,j} & \ldots & a_{p,n} \end{pmatrix} \begin{matrix} e'_1 \\ \vdots \\ e'_i \\ \vdots \\ e'_p \end{matrix} \\ \begin{matrix} f(e_1) & \ldots & f(e_j) & \ldots & f(e_n) \end{matrix} \end{array}$$

13.4. Matrice de Passage

Définition : On appelle **matrice de passage** ou $\mathrm{P}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ la matrice constituée en colonnes des coordonnées des vecteurs de la nouvelle base $\mathcal{B}_2$ écrits dans l'ancienne $\mathcal{B}_1$. On l'appelle aussi **matrice de changement de base**.

C'est donc une matrice inversible.
Toute matrice carrée inversible peut toujours s'interpréter

- comme matrice d'un endomorphisme dans une certaine base,
- ou comme matrice de changement de base.

Passer d'une interprétation à une autre permet parfois de faire avancer le problème.

13.5. Changements de base

Théorème : Si on appelle X et X' les vecteurs colonnes, coordonnées d'un vecteur dans l'ancienne et la nouvelle base, et P la matrice de passage, on a $X = PX'$ ou bien $X' = P^{-1}X$.

Théorème : Si on appelle M et M' les matrices d'un endomorphisme dans l'ancienne et la nouvelle base, et P la matrice de passage, on a $M' = P^{-1}MP$ ou bien $M = PM'P^{-1}$.

Définition : M et M' sont semblables $\Leftrightarrow \exists P$ inversible telle que $M' = P^{-1}MP \Leftrightarrow$ ce sont les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes.

14. Déterminants

14.1. Ordre 2 et 3

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$\begin{vmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{vmatrix}$ peut se développer par la règle de Sarrus $\searrow + \searrow + \searrow - \nearrow - \nearrow - \nearrow$

> La règle de Sarrus n'est absolument pas généralisable à des ordres supérieurs !

14.2. Matrice triangulaire

Théorème : Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses éléments diagonaux.

14.3. Ordre quelconque

La règle des signes est : $\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots & \cdots & \\ - & + & - & & & \\ + & - & + & & & \\ & & & + & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ \vdots & & & & & \ddots \\ & & & & & & + & - \\ & & & & & & - & + \end{vmatrix}$

On développe suivant une ligne ou une colonne en tenant compte de la règle de signes, on a ainsi une somme de termes du type : $(-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$, où a_{ij} est le coefficient de la matrice et Δ_{ij} est le déterminant d'ordre $n-1$ obtenu en enlevant la ligne i et la colonne j correspondante.

Théorème : $\Delta = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$

14.4. Déterminant d'un produit, d'une matrice inversible

Théorème : Pour A d'ordre n, A inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow rg(A) = n$

Théorème : $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, et si A est inversible, $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$

14.5. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Théorème : $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, O est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $p+q=n$. Alors,

$$\begin{vmatrix} A & B \\ O & C \end{vmatrix} = \det(A) \times \det(C)$$

> Cette propriété **ne se généralise pas** au déterminant d'une matrice définie par blocs et non triangulaire par blocs.

15. Réduction des Endomorphismes

15.1. Valeurs propres et vecteurs propres

Définition : $f : E \to E$ linéaire,
un couple (λ,u) $(u \neq 0)$ est un **couple valeur propre, vecteur propre** de E $\Leftrightarrow f(u) = \lambda.u$

Définition : Pour λ une valeur propre de E, on appelle **sous-espace propre** associé à λ,
$\mathrm{E}_\lambda = \{u \ / \ f(u) = \lambda.u\} = \ker(f - \lambda Id_E)$
C'est clairement un sous-espace vectoriel de E.

> Le noyau est donc aussi le sous-espace propre associé à la valeur propre 0.

Théorème : Les sous-espaces propres sont toujours en somme directe. Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres **distinctes** est libre.

15.2. Polynôme caractéristique

Définition : f un endomorphisme de E de dimension n, A sa matrice dans une base quelconque,
le **polynôme caractéristique** de f est : $P_f(\lambda) = P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$.

Théorème : Le polynôme caractéristique de f est indépendant de la base choisie. Les racines du polynôme caractéristique de f sont les valeurs propres de f.

Sur $\mathbb{C}$, le polynôme caractéristique est toujours scindé. Il y a donc toujours n valeurs propres distinctes ou confondues.
Sur $\mathbb{R}$, ça n'est pas toujours le cas... Le polynôme caractéristique peut avoir des racines complexes non réelles.

Théorème : λ une valeur propre de f, alors : $1 \leqslant \dim(E_\lambda) \leqslant$ ordre de multiplicité de λ comme racine de P_f

15.3. Diagonalisibilité

Définition : Un endomorphisme est **diagonalisable** $\Leftrightarrow$ il existe une base de vecteurs propres

Théorème :

$$A \text{ (ou } f\text{...) diagonalisable} \Leftrightarrow \begin{cases} P_A(\lambda) \text{ est scindé} \\ \dim(E_\lambda) = \text{ordre de multiplicité de } \lambda \text{ dans } P_A \end{cases}$$

En particulier, lorsque $P_A(\lambda)$ est scindé à racines simples, A (ou f...) est diagonalisable. (condition suffisante non nécéssaire)

15.4. Diagonalisibilité et diagonalisation

Quand une matrice A est **diagonalisable**, une erreur courante est de dire que, *dans une certaine base, A* est diagonale, ce qui est bien sûr grossièrement faux et même stupide.
On a simplement une matrice de passage P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$ ou bien $D = P^{-1}AP$.

La confusion provient de ce que A et D sont les matrices d'un **même** endomorphisme dans deux bases différentes...
Il est par contre exact de dire que si un endomorphisme f est diagonalisable, et s'il est de matrice A dans la base $\mathcal{B}$, il existe une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle sa matrice est D, diagonale.
P étant la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, on a alors : $A = PDP^{-1}$ et $D = P^{-1}AP$.

15.5. Triangularisation

Théorème : Si le polynôme caractéristique est scindé, il existe une base où la matrice est triangulaire.

En particulier, sur $\mathbb{C}$, toute matrice est triangularisable.

15.6. Puissances d'une matrice

On fera attention, par convention : $B^0 = I_n$, la matrice identité.

- Si A est diagonalisable, et D diagonale semblable à A, alors $A = PDP^{-1}$ et $A^k = PD^kP^{-1}$.
- Si $A = M + N$, avec $MN = NM$, ce qu'il faut impérativement vérifier, alors : $A^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k M^k N^{p-k}$

  Ceci est surtout utilisé lorsque M^2 ou M^3 est nulle, car alors la somme se réduit aux 3 ou 4 premiers termes.
- Si $A^2 = \alpha A + \beta I$ alors $A^n = \alpha_n A + \beta_n I$ et on peut chercher des relations de récurrence entre les coefficients en écrivant A^{n+1} de deux façons : $A^{n+1} = A^n \times A$.

16. Espaces Préhilbertiens Réels et Euclidiens

16.1. Produit scalaire

Définition : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$,
une **forme bilinéaire symétrique** sur E est une application de $E \times E \to \mathbb{R}$

- linéaire par rapport à chacune des variables (l'autre étant fixée) et
- symétrique (on peut inverser l'ordre des variables).

Définition : Une **forme quadratique** sur $\mathbb{R}^n$ est une application de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui se met sous la forme d'un polynôme homogène de degré 2 des coordonnées du vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Théorème : Si φ est une forme bilinéaire symétrique sur E, alors : $q : \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ u \mapsto q(u) = \varphi(u,u) \end{cases}$ est une forme quadratique, appelée **forme quadratique associée** à φ.
Par ailleurs, si q est une forme quadratique sur E, alors $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(u,v) = \frac{q(u+v) - q(u) - q(v)}{2}$$

est une forme bilinéaire symétrique. C'est la **forme polaire** de q.

Définition : E un espace vectoriel réel.
Un **produit scalaire** est une application de $E \times E \to \mathbb{R}$ bilinéaire, symétrique, définie-positive.

En pratique, on montre :

- $\forall u,v \in E, \quad \langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$. La forme est symétrique
- $\left.\begin{array}{c} \forall u_1,u_2,v \in E \\ \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \langle \lambda.u_1 + \mu.u_2, v\rangle = \lambda\langle u_1,v\rangle + \mu\langle u_2,v\rangle$. La forme est donc bilinéaire symétrique
- $\forall u, \in E, \quad \langle u,u\rangle \geqslant 0$. La forme est positive
- $\langle u,u\rangle = 0 \Rightarrow u = 0$. La forme est définie-positive

C'est souvent le dernier point qui pose problème.

Quand le produit scalaire est défini par une intégrale, c'est à ce moment qu'on utilise le théorème des 3 conditions.

Théorème : E étant muni d'une base $(e_1,\ldots,e_n)$,
On note : $U : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $V : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les vecteurs colonnes des coordonnées de u et v dans la base,
On note A, la matrice symétrique où $a_{i,j} = \langle e_i,e_j\rangle$, alors :

$$\langle u,v\rangle = {}^tUAV$$

A est ainsi la **matrice de la forme bilinéaire symetrique**, encore appelée **matrice du produit scalaire** dans la base $(e_1,\dots,e_n)$.
Si, de plus, la base est orthonormale, alors on a :

$$\langle u,v\rangle = {}^tUV = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Définition : La **norme** euclidienne est : $\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Exemple : Sur les matrices carrées, le produit scalaire usuel est : $\langle A,B\rangle = \text{trace}({}^tAB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\,b_{i,j}$

16.2. Espaces vectoriels préhilbertiens et euclidiens

Définition : E un espace vectoriel réel est dit **préhilbertien réel** quand il est muni d'un produit scalaire. Si, de plus, il est de dimension finie, il est dit **euclidien.**

16.3. Inégalités

Théorème : On a l'inégalité de Schwarz : $\forall u,v \in E,\ |\langle u,v\rangle| \leqslant \|u\|\,\|v\|$.

Théorème : On a l'inégalité triangulaire : $\forall u,v \in E,\ \|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

16.4. Endomorphismes symétriques

Définition : Un endomorphisme f est dit **symétrique** $\Leftrightarrow \forall u,v \in E,\quad \langle f(u),v\rangle = \langle v,f(u)\rangle$

Théorème : f est symétrique $\Leftrightarrow$ sa matrice dans une base orthonormale est symétrique.

16.5. Matrice symétrique réelle

Théorème : Une matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormale, c'est à dire avec **au besoin** une matrice de passage orthogonale, telle que : $P^{-1} = {}^tP$.
Les sous-espaces propres ainsi que les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux 2 à 2.

16.6. Procédé de Schmidt

Théorème : Tout espace vectoriel euclidien possède une base orthonormale.

Le procédé de Schmidt permet de construire effectivement une base orthonormale à partir d'une base quelconque.

- On part d'une base quelconque $(e_1,e_2,\dots,e_n)$
- On pose $\varepsilon_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$ C'est le premier vecteur de la base orthonormale.
- On pose $\varepsilon_2^* = e_2 + \lambda.\varepsilon_1$ On cherche λ tel que $\langle \varepsilon_2^*, \varepsilon_1\rangle = 0$, ce qui donne : $\lambda = -\langle e_2,\varepsilon_1\rangle$
- On pose $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon_2^*}{\|\varepsilon_2^*\|}$ C'est le deuxième vecteur de la base orthonormale.
- On pose $\varepsilon_3^* = e_3 + \lambda.\varepsilon_1 + \mu.\varepsilon_2$ On cherche λ et μ tel que $\begin{cases} \langle \varepsilon_3^*,\varepsilon_1\rangle = 0 \\ \langle \varepsilon_3^*,\varepsilon_2\rangle = 0 \end{cases}$, d'où : $\begin{cases} \lambda = -\langle e_3,\varepsilon_1\rangle \\ \mu = -\langle e_3,\varepsilon_2\rangle \end{cases}$
- On pose $\varepsilon_3 = \dfrac{\varepsilon_3^*}{\|\varepsilon_3^*\|}$ C'est le troisième vecteur de la base orthonormale.
- On continue ainsi en n'oubliant pas que chaque étape s'allonge...

16.7. Projection orthogonale sur un sous espace de dimension finie

Théorème : E un espace vectoriel préhilbertien, F un sous espace vectoriel de dimension finie muni d'une base orthonormale $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Alors

$$p : u \to p(u) = \langle u, e_1 \rangle . e_1 + \cdots + \langle u, e_n \rangle . e_n$$

définit un projecteur. Et comme $(u - p(u)) \in F^{\perp}$, on dit que p est la projection orthogonale sur F.

Ce qu'on peut voir sur la figure 1, ci-dessous.

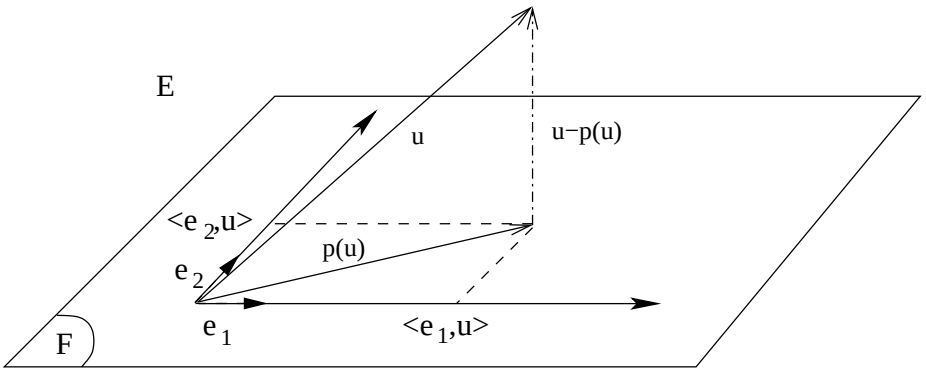


Figure 1 – **Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie**

16.8. Méthode des Moindres Carrés

a/ Problème

On a un phénomène, physique par exemple, qui, en théorie suit une loi affine du type : $y = a\,x + b$.
Par ailleurs, on cherche expérimentalement à vérifier les valeurs théoriques de a et b.
Pour cela, on réalise une série de n mesures : $(x_1,y_1)\,,(x_2,y_2)\,,\ldots,(x_n,y_n)$.

b/ Solution

On cherche à minimiser la somme des carrés des différences d'ordonnées entre les points (x_i,y_i) et (x_i,ax_i+b).
Sur la figure 2, page ci-contre, les segments dont on minimise la somme des carrés des longueurs sont verticaux et tracés en gras.

On cherche donc à minimiser : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (y_i - a\,x_i - b)^2$.

Pour cela, on annule les dérivées partielles par rapport à b et à a, ce qui donne en simplifiant un peu les égalités obtenues :

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i + nb \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i$$

On résout simplement ce système de 2 équations à 2 inconnues a et b.

c/ Autre interprétation

Cela revient aussi simplement à ce que le vecteur $\begin{pmatrix} a\,x_1 + b \\ a\,x_2 + b \\ \vdots \\ a\,x_n + b \end{pmatrix}$ soit la projection orthogonale du vecteur $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sur l'espace vectoriel engendré par $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

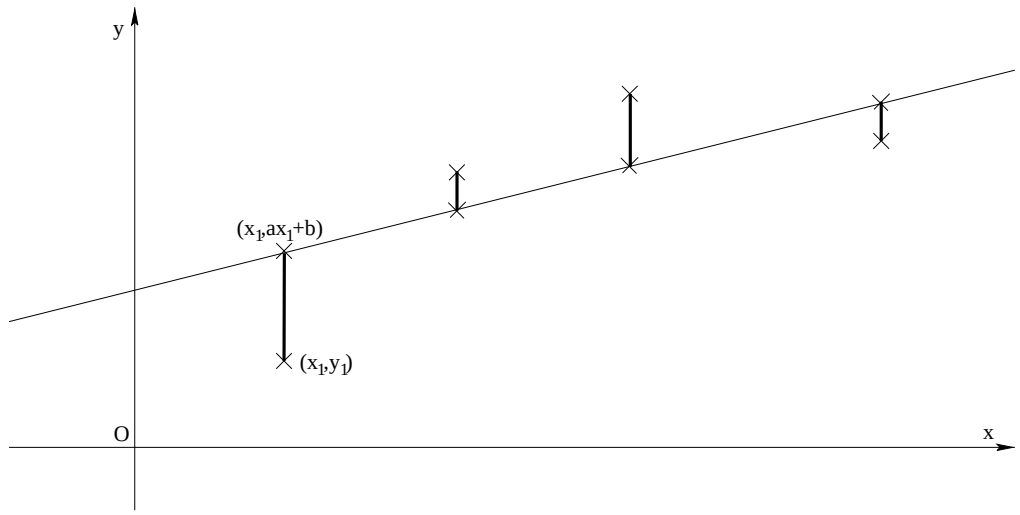


Figure 2 – **Méthode des Moindres Carrés**

Les réels a et b sont alors les coordonnées de la projection orthogonale du vecteur indiqué dans cette base (non orthonormale). En écrivant les orthogonalités voulues, on obtient le même système.

17. Groupe Linéaire et Groupe Orthogonal

17.1. Groupe linéaire

Théorème : E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. L'ensemble des isomorphismes de E, muni de la loi $\circ$ de composition des applications est un groupe, appelé groupe linéaire de E et noté $\mathrm{GL}(E)$.

Notation : Si $E = \mathbb{R}^n$ ou $E = \mathbb{C}^n$, le groupe linéaire de E se note GL_n La loi est alors le produit des matrices.

17.2. Groupe orthogonal

Définition : Un endomorhisme f de E un espace vectoriel réel, est dit **orthogonal**
$\Leftrightarrow f$ conserve le produit scalaire
$\Leftrightarrow \forall u,v \in E, \quad \langle f(u),f(v)\rangle = \langle u,v\rangle$

Théorème : f est orthogonal $\Leftrightarrow f$ conserve la norme
$\Leftrightarrow \forall u \in E, \quad \|f(u)\| = \|u\|$

Définition : Une matrice M est **orthogonale** $\Leftrightarrow$ M est la matrice d'un endomorphisme orthogonal dans une base orthonormale.

Théorème : M est orthogonale $\Leftrightarrow$ les vecteurs colonnes de M sont normés et orthogonaux 2 à 2
$\Leftrightarrow$ les vecteurs lignes de M sont normés et orthogonaux 2 à 2
$\Leftrightarrow M^{-1} = {}^tM$
$\Leftrightarrow M\,{}^tM = I$
$\Leftrightarrow {}^tM\,M = I$

Théorème : L'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E, muni de la loi $\circ$ de composition des applications est un groupe noté $O(E)$, sous groupe de $GL(E)$.

Notation : Si $E = \mathbb{R}^n$, le groupe orthogonal de E se note $O(n)$ La loi est alors le produit des matrices.

Analyse

18. Suites

18.1. Suites

Définition : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers l
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \quad \exists p \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant p, \quad |u_n - l| \leqslant \varepsilon$

Théorème : La limite l, quand elle existe, est unique.

> Cette définition est valable pour une suite réelle ou complexe.
> Dans le cas d'une suite vectorielle, il suffit de remplacer $|u_n - l|$ par $\|u_n - l\|$.

Théorème : L'ensemble des suites muni de la somme de deux suites et de la multiplication par un scalaire a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Il en est de même de l'ensemble des suites convergentes.

18.2. Sous-suites

Définition :
$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **sous-suite** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow \exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(v_n) = \left(u_{\varphi(n)}\right)$

Théorème : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \Rightarrow$ toute sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l
Si deux sous-suites ont des limites différentes ou si une sous-suite diverge, la suite diverge.

Théorème : Une suite convergente est bornée.

Théorème : Quand $n \to +\infty$, $\left.\begin{array}{l} u_n \to l \\ v_n \to l \\ \lambda \in \mathbb{K} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u_n + v_n \to l + l' \\ u_n\, v_n \to l\, l' \\ \lambda\, u_n \to \lambda\, l \end{array}\right.$

18.3. Suites vectorielles

Théorème : On a $u_n = (u_{1n}, u_{2n}, \ldots, u_{pn})$ et $l = (l_1, l_2, \ldots, l_p)$, alors $\quad u_n \to l \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u_{1n} \to l_1 \\ u_{2n} \to l_2 \\ \quad\vdots \\ u_{pn} \to l_p \end{array}\right.$

18.4. Suites réelles ou complexes

Définition : Deux suites sont **équivalentes** $\Leftrightarrow u_n = v_n\, w_n$ avec $w_n \to 1$.
En pratique, si à partir d'un certain rang $v_n \neq 0$, cela revient à $\dfrac{u_n}{v_n} \to 1$.

Théorème : La suite (u_n) converge $\Leftrightarrow$ La série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge

18.5. Suites réelles

Théorème : Toute suite croissante majorée converge.

Théorème : Toute suite décroissante minorée converge.

Théorème : (suites **adjacentes**) $\left.\begin{array}{r}(u_n)\nearrow\\(v_n)\searrow\\(u_n-v_n)\to 0\end{array}\right\}\Rightarrow (u_n)$ et (v_n) convergent vers la même limite

18.6. Suites définies par une relation de récurrence

- On a $u_0\in D_f$, et $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=f(u_n)$ et si $u_n\in D_f,\quad u_{n+1}\in D_f$
- En tout état de choses, on résout d'abord l'équation : $f(x)=x$, ses solutions sont les limites éventuelles de (u_n), les points fixes de f, dans la mesure où f est continue en ce point.
- Le procédé est basé sur l'inégalité des accroissements finis.
- Si, sur un intervalle I stable par f, l un point fixe, et $|f'(x)|\leqslant k<1$, on montre que $|u_{n+1}-l|\leqslant k\,|u_n-l|$ et donc par récurrence immédiate, que $|u_n-l|\leqslant k^n\,|u_0-l|$ ce qui assure la convergence.

18.7. Suites récurrentes linéaires

Il s'agit, comme dans toute « équation linéaire », d'ajouter une solution particulière du problème avec second membre à la solution générale du problème sans second membre.

a/ Suite récurente linéaire simple

- $au_{n+1}+bu_n=0$ La solution est géométrique $u_n=\alpha\left(\dfrac{-b}{a}\right)^n$
- $au_{n+1}+bu_n=c$ Chercher une solution particulière sous forme de suite constante

b/ Suite récurrente linéaire double

- $au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n=0$ On calcule les solutions de l'équation caractéristique $ar^2+br+c=0$
  - 2 racines distinctes r_1 et r_2 : $u_n=\alpha r_1^n+\beta r_2^n$
  - 1 racine double r : $u_n=\alpha r^n+\beta nr^n$
  - sur $\mathbb{R}$, 2 racines complexes $r=s\,e^{\pm i\omega}$: $u_n=s^n\,(\alpha\cos n\omega+\beta\sin n\omega)$
- $au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n=d$ Chercher une solution particulière
  - constante γ
  - ou, en cas d'échec, γn
  - ou, en cas de nouvel échec, γn^2

19. Fonctions $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

19.1. Ensemble de définition

L'**ensemble de définition** de f est l'ensemble des valeurs de x telles qu'on puisse effectivement calculer $f(x)$. Pour cela, on regarde les dénominateurs, racines, quotients, logarithmes, tangentes...

Le problème est plus complexe pour une fonction définie par une intégrale $\displaystyle\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\ \mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_a^b f(x,t)\ \mathrm{d}t$.

De plus, si l'intégrale est généralisée, il faut même chercher les x tels que l'intégrale converge...

19.2. Monotonie

Définition : f est **croissante** sur I un intervalle $\Leftrightarrow (a<b\Rightarrow f(a)\leqslant f(b))$
f est **strictement croissante** sur I un intervalle $\Leftrightarrow (a<b\Rightarrow f(a)<f(b))$

Théorème : f est dérivable sur I, un **intervalle**,
f est **croissante** sur $I \Leftrightarrow f'(x) \geqslant 0$ sur I

Théorème : f dérivable sur I, un **intervalle**,
$f'(x) \geqslant 0$ sur I et f' ne s'annule qu'en des points isolés, $\Rightarrow f$ est strictement croissante sur I.

> Cette dernière implication n'est pas une équivalence...

Théorème : Une fonction croissante, majorée sur $[a,b[$, admet une limite finie en b.

Théorème : f continue, strictement monotone sur I un intervalle est une bijection de I sur $f(I)$.
De plus, f^{-1} est alors continue sur $f(I)$.

19.3. Limite et continuité

Définition : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad |x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)-l| \leqslant \varepsilon.$
Si, de plus, $l = f(a)$, on dit que f est **continue** en a.

On a une autre définition de limite à l'infini – qu'on peut adapter en $-\infty$.

Définition : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \quad \exists A > 0, \quad x \geqslant A \Rightarrow |f(x)-l| \leqslant \varepsilon.$

On a encore une définition quand la limite est infinie – qu'on peut adapter pour une limite $-\infty$.

Définition : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad |x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) \geqslant A.$

Et, enfin, une dernière définition pour une limite infinie à l'infini – qu'on peut...

Définition : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \quad \exists B > 0, \quad x \geqslant B \Rightarrow f(x) \geqslant A.$

> Pour éviter ces multiples définitions de la notion de limite, on peut considérer la droite « achevée » :
> $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
> Mais il faut alors donner les définitions en terme de « voisinage ».

Théorème : Une fonction admettant une limite **finie** en un point est **bornée** au voisinage de ce point.

Théorème : Une somme, un produit, une combinaison linéaire, une composée, un quotient (quand ils sont définis...) de fonctions continues en un point sont continues en ce point.

19.4. Continuité sur un intervalle

Définition : Si f est continue en tout point a d'un intervalle I, on dit que f est **continue sur** I.

Théorème : Une somme, un produit, une combinaison linéaire, une composée, un quotient (quand ils sont définis...) de fonctions continues sur un intervalle sont continues sur cet intervalle.

Théorème : $f(I)$ l'image d'un intervalle I par f continue sur I est un intervalle.

Théorème : L'image d'un segment $[a,b]$ par f continue sur $[a,b]$ est un segment $[c,d]$.
Une application continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Corollaire : (Théorème des valeurs intermédiaires)
Si f est **continue** et change de signe entre a et b, alors, il existe c dans $[a,b]$ tel que $f(c) = 0$.

19.5. Fonction en escalier, fonction continue par morceaux

Définition : Si f est définie sur $I=[a,b]$, avec $a_0=a<a_1<a_2<\cdots<a_n=b$ et si f est constante sur tous les intervalles $]a_{i-1},a_i[$, pour $i\in\{1,\dots,n\}$, on dit que f est **en escalier sur** I.

Définition : Si f est définie sur $I=[a,b]$, avec $a_0=a<a_1<a_2<\cdots<a_n=b$ et si f est continue sur tous les intervalles $]a_{i-1},a_i[$, pour $i\in\{1,\dots,n\}$, on dit que f est **continue par morceaux sur** I.

19.6. Limites usuelles

Les limites usuelles permettent de résoudre de nombreuses formes indéterminées.
On se reportera aussi, bien sûr, aux développements limités usuels...

a/ Limites en 0

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1 \qquad \lim_{x\to0}x\ln x=0$$

b/ Limites en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}x\,\mathrm{e}^{-x}=0$$

c/ Croissances comparées

Les limites suivantes sont connues sous le nom de théorème des croissances comparées.

> On a ici α et β **strictement positifs**.

$$\lim_{x\to0}x^\alpha\ln^\beta x=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^\alpha x}{x^\beta}=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta}=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}x^\alpha\,\mathrm{e}^{-\beta x}=0$$

19.7. Equivalents

Définition : On dit que : $f(t)\underset{t\to a}{\sim}g(t)\Leftrightarrow f(t)=g(t)(1+\varepsilon(t))$ avec $\lim\limits_{t\to a}\varepsilon(t)=0$

Ici, a est fini ou infini.
En pratique, cela revient à ce que le quotient tend vers 1.

> Les équivalents ne s'ajoutent pas.

Quand on veut trouver un équivalent, le mieux est de mettre « de force » l'équivalent pressenti en facteur et de montrer que l'autre facteur tend vers 1.
On revient ainsi, sans risque, à la définition.

19.8. Négligeabilité

Définition : On dit que : $f(t)\underset{t\to a}{=}\mathrm{o}(g(t))\Leftrightarrow f(t)=g(t)\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to a}\varepsilon(t)=0$.

Ici, a est fini ou infini.
En pratique, pour une fonction g qui ne s'annule pas au voisinage de a,
cela revient à ce que le quotient $\dfrac{f(t)}{g(t)}$ tend vers 0 au point considéré.

Définition : On dit que : $f(t)\underset{t\to a}{=}\mathrm{O}(g(t))\Leftrightarrow f(t)=g(t)\,h(t)$ avec $h(t)$ borné au voisinage de a.

> On utilise ceci principalement sous la forme $o\left(t^n\right)$ ou $O\left(t^n\right)$ dans les développements limités.

20. Dérivabilité

20.1. Dérivée, classe $\mathscr{C}^1$ et notations

Définition : f est **dérivable** en $a \Leftrightarrow \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite finie quand x tend vers a.

Notation : Cette dérivée en a est notée $f'(a)$ ou $\mathrm{D}f(a)$ ou encore $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$.

Théorème : f dérivable en $a \Rightarrow f$ est continue en a. La réciproque est fausse!

Définition : f est **dérivable** sur $I \Leftrightarrow f$ est dérivable en tout point $a \in I$.
Si, de plus, la fonction dérivée est continue sur I, on dit que f est de **Classe** $\mathscr{C}^1$ sur I.

Notation : Cette fonction dérivée sur I est notée f' ou $\mathrm{D}f$ ou encore $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

20.2. Classe $\mathscr{C}^n$

Définition :
f est de **classe** $\mathscr{C}^n$ sur $I \Leftrightarrow f$ est n fois dérivable sur I, la dérivée $n^{\text{ème}}$ étant, de plus, continue sur I.

Notation : Cette fonction dérivée $n^{\text{ème}}$ sur I est notée $f^{(n)}$ ou $\mathrm{D}^n f$ ou encore $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$.

20.3. Sommes et produits de fonctions dérivables

Théorème : f et g dérivables en un point ou sur un intervalle $\Rightarrow \begin{cases} (f+g)' = f'+g' \\ (f\times g)' = f'\times g + f\times g' \\ \left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'\times g - f\times g'}{g^2} \end{cases}$

En se plaçant pour cette dernière propriété en un point où g est non nulle.

Théorème : Si f et g sont n fois dérivables $(f\times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, f^{(k)} \times g^{(n-k)}$

Ceci s'utilise surtout avec une des deux fonctions qui est un polynôme, une exponentielle ou une fonction trigonométrique.

20.4. Dérivée d'une fonction composée

Théorème : $(g\circ f)' = (g'\circ f)\times f'$ c'est à dire : $(g(f(x)))' = g'(f(x))\times f'(x)$

Théorème : En un point où f' est non nulle: $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f'\circ f^{-1}}$ c'est à dire : $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$
avec les notations habituelles $y = f(x)$.

20.5. Dérivée et prolongement par continuité

Pour étudier la dérivabilité d'une fonction en un point où elle a été prolongée par continuité, on peut

- ou calculer la limite de $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ qui permet d'obtenir la dérivabilité mais ne prouve pas la classe $\mathscr{C}^1$
- ou bien calculer la limite de $f'(x)$
  - quand cette limite existe et est finie, f est de classe $\mathscr{C}^1$,
  - quand cette limite est infinie, f n'est pas dérivable au point,
  - mais s'il n'y a pas de limite, on ne prouve rien...

20.6. Théorème de Rolle et des Accroissements Finis, Formules de Taylor

Théorème : (Rolle)
f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, $\quad f(a)=f(b) \Rightarrow \exists c \in]a,b[$, tel que : $f'(c)=0$

Théorème : (Egalité des accroissements finis)
f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, $\Rightarrow \exists c \in]a,b[$, tel que : $\quad f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Théorème : (Inégalité des accroissements finis)
f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, de dérivée bornée $\Rightarrow \left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \leqslant \sup\limits_{c\in]a,b[} \left|f'(c)\right|$

On n'écrira ici que les formules de Taylor en 0 ou sur l'intervalle $[0,x]$.
On peut se placer en un point a ou sur $[a,b]$, en adaptant les notations.

Théorème : (Taylor-Young) Si f est n-fois dérivable au voisinage de 0 :

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+o(x^n) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)}{x^n}=0$$

Théorème : (Taylor avec reste intégral) Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur l'intervalle :

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t$$

Théorème : (Inégalité de Taylor-Lagrange) Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur l'intervalle :

$$\left|f(x)-\left(f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)\right)\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{t\in[0,x]}\left|f^{(n+1)}(t)\right|$$

20.7. Zéros d'une fonction

Une fonction continue qui change de signe sur un intervalle s'annule au moins une fois, d'après le théorème des valeurs intermédiaires. On appelle les valeurs de x telles que $f(x)=0$ les **zéros** de la fonction.
Si on ne sait pas calculer les valeurs exactes de ces zéros, on en calcule des valeurs approchées par des méthodes itératives.

a/ Recherche d'un zéro d'une fonction par dichotomie

Théorème : Soit f continue et strictement monotone sur $[a,b]$ telle $f(a)f(b)<0$, c'est à dire $f(a)$ et $f(b)$ de signes différents, alors, il existe un **unique** $c \in]a,b[$ tel que : $f(c)=0$.

Pour trouver une valeur approchée de ce zéro, on calcule le signe de $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
On continue en remplaçant $[a,b]$ par :

- $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ si $f(a)$ et $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ sont de signes différents ;
- $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ si $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et $f(b)$ sont de signes différents.

Ainsi, c est toujours dans l'intervalle considéré et on a une valeur approchée de c à ε près dès que la longueur de l'intervalle est inférieure à ε.
Comme la longueur de cet intervalle est divisée par 2 à chaque étape, la convergence est rapide.

b/ Théorème de Newton-Raphson

Théorème : Soit f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$, $a<b$, avec $f(a)$ et $f(b)$ de signes différents, f' et f'' qui ne s'annulent pas sur $]a,b[$,
x_0 tel que $f(x_0)f''(x_0)\geqslant 0$, alors f possède un unique zéro dans $[a,b]$, limite de la suite (x_n) définie par :

$$x_0=a \quad \text{et} \quad \forall x\in\mathbb{N}, \quad x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

La convergence de la suite est plus rapide que par dichotomie.

> On peut choisir $x_0 = a$, ou $x_0 = b$, le mieux est de regarder le graphe de f sur $[a,b]$.

On obtient x_{n+1} par intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à la courbe au point d'abscisse x_n, comme on peut le voir sur le graphe 3, ci-dessous.

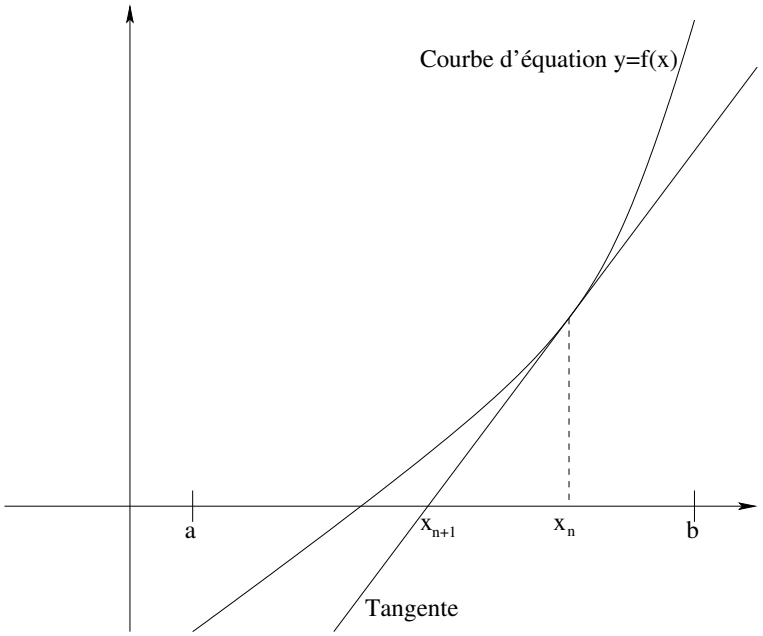


Figure 3 – ***Théorème de Newton-Raphson***

20.8. Développements limités

On n'écrira ici que des développements limités en 0. on peut se placer en un point a en adaptant les notations.

Définition : On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en 0
$\Leftrightarrow$ il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$

> f admet un dl_0 en $0 \Leftrightarrow f$ est continue en 0
> f admet un dl_1 en $0 \Leftrightarrow f$ est dérivable en 0. (mais on ne peut pas généraliser à un dl_n...)

Théorème : f est de classe $\mathscr{C}^n$ en $0 \Rightarrow f$ admet un dl_n en 0, qui est le développement de Taylor!

20.9. Opérations sur les dl_n

On agira toujours avec des développements au même ordre.

- Somme : ajouter simplement les parties régulières.
- Produit : faire le produit des parties régulières et tronquer à l'ordre n.
- Quotient : se ramener à $k\dfrac{f(x)}{1+u(x)}$, avec $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$, et utiliser $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + \cdots + (-1)^n u^n + o(u^n)$
- Composée : pour $g \circ f$, vérifier que $f(0) = 0$, faire la composée des parties régulières et tronquer à l'ordre n.
- On obtient un dl_{n+1} de la primitive de f en intégrant terme à terme le dl_n de f.
  Attention aux constantes d'intégration... On ne peut pas faire la même chose pour la dérivée !

21. Fonctions usuelles

21.1. Exponentielle et Logarithme

- La fonction **exponentielle** : $x \to \exp(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$, croissante. On peut aussi la définir sur $\mathbb{C}$. Elle vérifie la propriété fondamentale : $\exp(a+b) = \exp(a)\ \exp(b)$.

  Sur $\mathbb{R}$, le tableau de variation est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp(x)$	0	↗	1	↗	$+\infty$

- La fonction **logarithme** est la réciproque de la précédente et n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$, croissante. Elle vérifie la propriété fondamentale : $\ln(a\,b) = \ln(a) + \ln(b)$.

  Le tableau de variation est :

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Ces deux fonctions sont tracées sur la figure 4, ci-dessous.

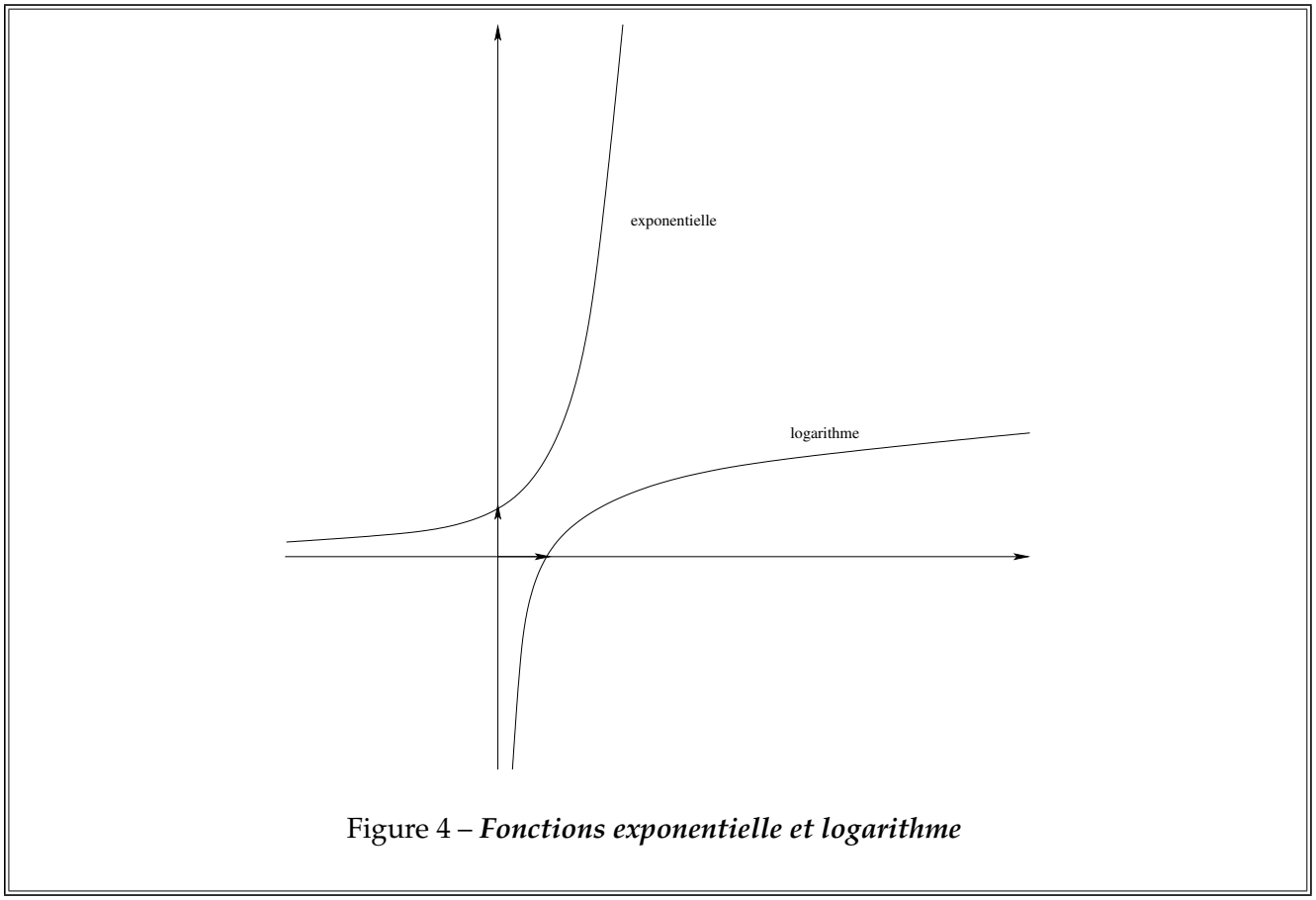


Figure 4 – ***Fonctions exponentielle et logarithme***

21.2. Fonctions trigonométriques circulaires

- La fonction **sinus**, $x \to \sin(x)$, est définie sur $\mathbb{R}$, $2\,\pi$ périodique, impaire ;

  Le tableau de variation est :

x	$-\pi$		$-\pi/2$		0		$\pi/2$		π
$\sin(x)$	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0

- La fonction **cosinus**, $x \to \cos(x)$, est définie sur $\mathbb{R}$, $2\,\pi$ périodique, paire ;

Le tableau de variation est :

x	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
$\cos(x)$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1
		0		0	

- La fonction **tangente**, $x \to \tan(x)$, est définie sur $\mathbb{R}\backslash \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, π périodique, impaire ;

Le tableau de variation est :

x	$-\pi/2$	0	$\pi/2$
$\tan(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 0	$\nearrow +\infty$

Les fonctions trigonométriques élémentaires sont sur la figure 5, ci-dessous.

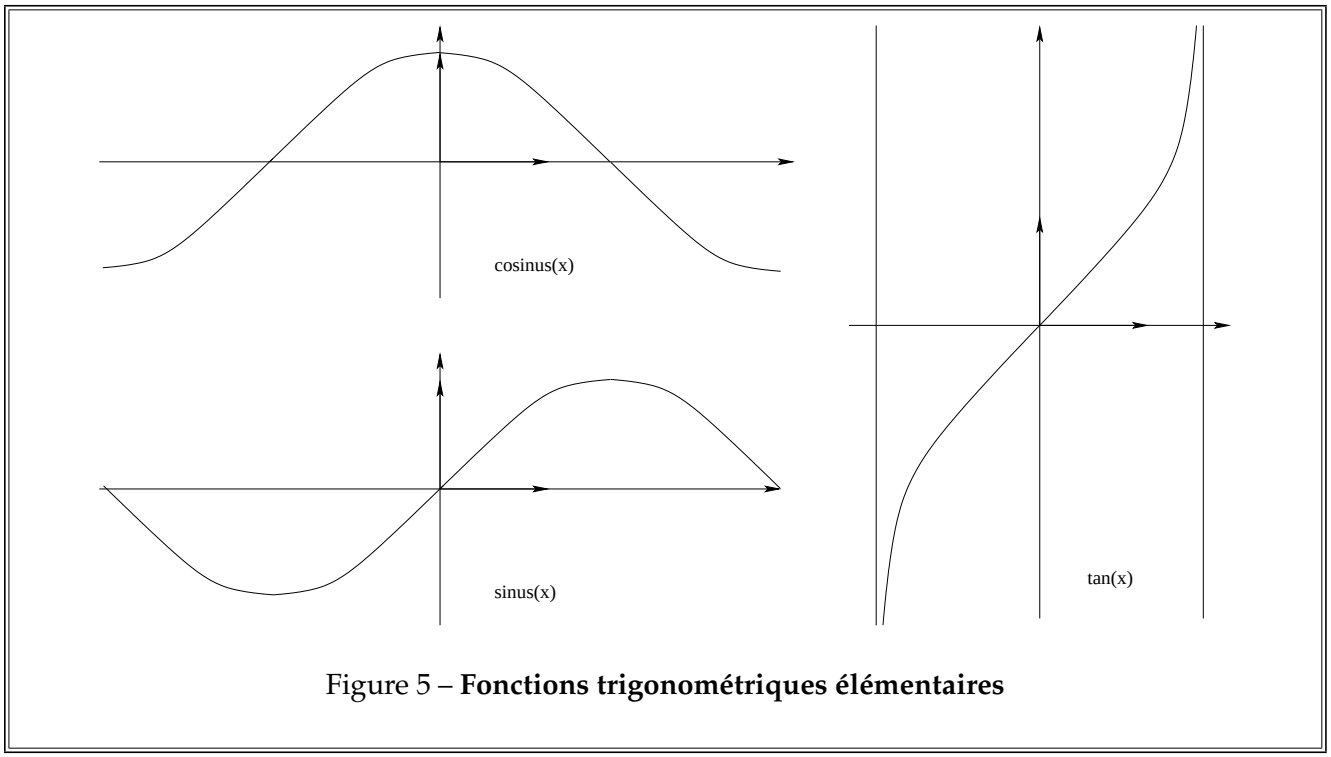


Figure 5 – **Fonctions trigonométriques élémentaires**

21.3. Fonctions trigonométriques réciproques

- La fonction **arcsinus**, $x \to \arcsin(x)$, est définie sur $[-1,1]$, impaire, croissante ;

Le tableau de variation est :

x	-1	0	1
$\arcsin(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$ 0	$\nearrow \frac{\pi}{2}$

- La fonction **arccosinus**, $x \to \arccos(x)$, est définie sur $[-1,1]$, décroissante ;

Le tableau de variation est :

x	-1	0	1
$\arccos(x)$	π	$\searrow$ $\frac{\pi}{2}$	$\searrow 0$

- La fonction **arctangente**, $x \to \arctan(x)$, est définie sur $\mathbb{R}$, impaire, croissante ;

Le tableau de variation est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\arctan(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

On a illustré les fonctions trigonométriques réciproques dans la figure 6, de la présente page.

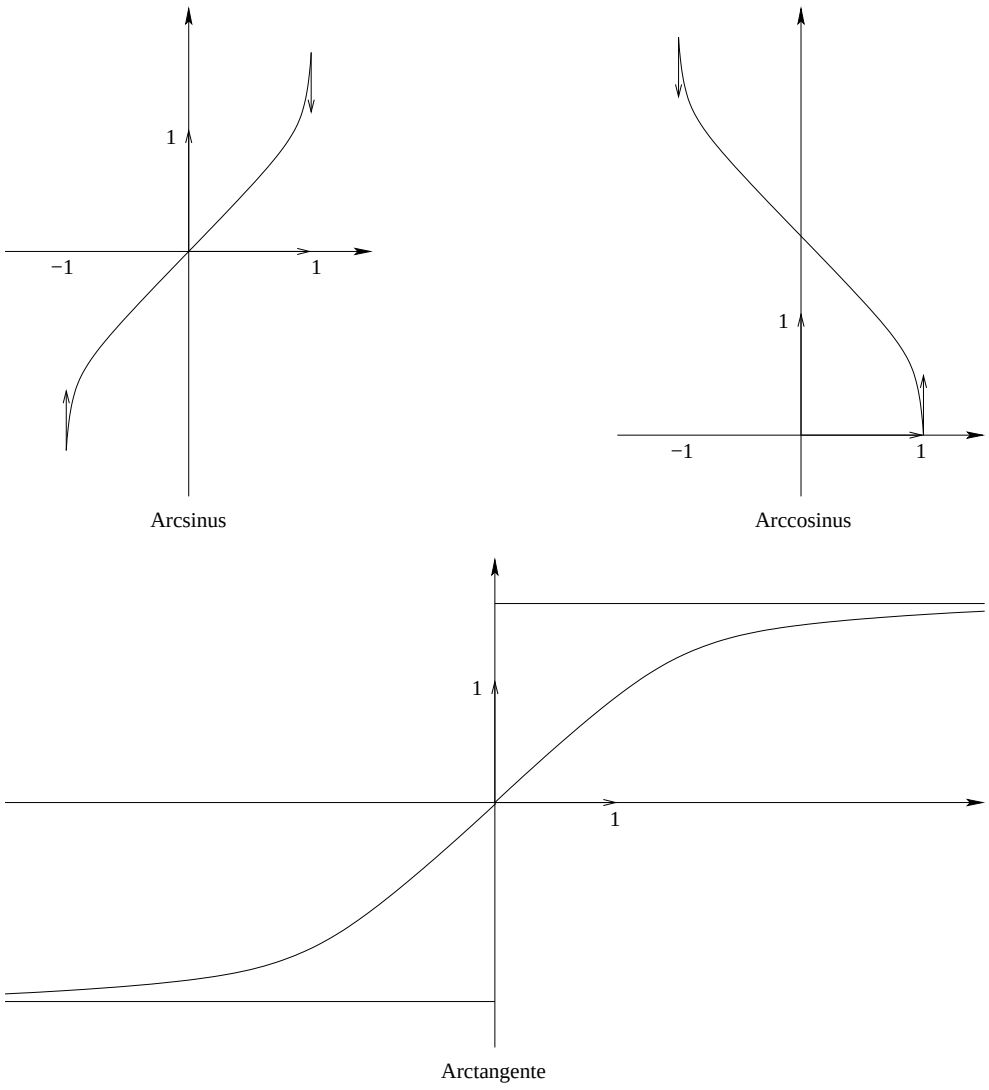


Figure 6 – **Fonctions trigonométriques réciproques**

Il faut se méfier des touches des calculatrices qui notent par exemple « $\tan^{-1}$ » l'application **réciproque** de l'application « tan », c'est à dire l'application « arctan » ...
Cela provient de ce que l'application « réciproque » est l'application « inverse » pour la composée des applications ...

21.4. Fonctions trigonométriques hyperboliques

- La fonction **sinus hyperbolique**, $x \to \text{sh}(x)$, est définie sur $\mathbb{R}$, impaire, croissante ;

Le tableau de variation est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{sh}(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

- La fonction **cosinus hyperbolique**, $x \to \mathrm{ch}(x)$, est définie sur $\mathbb{R}$, paire ;

Le tableau de variation est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

- La fonction **tangente hyperbolique**, $x \to \mathrm{th}(x)$, est définie sur $]-1,1[$, impaire, croissante ;

Le tableau de variation est :

x	-1		0		$+1$
$\mathrm{th}(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Rappelons la relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique : $\mathrm{ch}^2 a - \mathrm{sh}^2 a = 1$
Les deux fonctions $x \to \mathrm{ch}(x)$ et $x \to \mathrm{sh}(x)$ sont tracées sur la figure 7, ci-dessous.

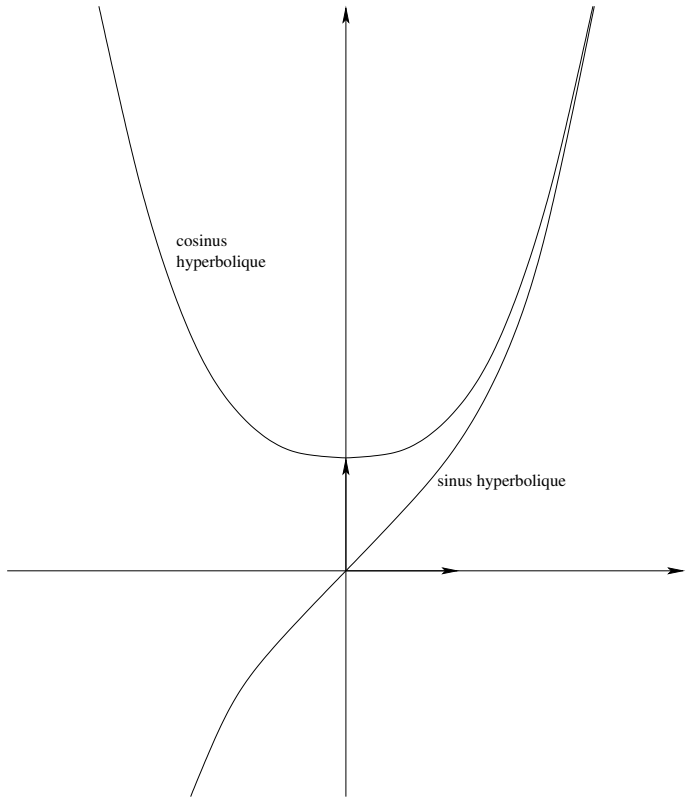


Figure 7 – ***Fonctions cosinus et sinus hyperboliques***

La fonction $x \to \mathrm{th}(x)$ est représentée sur la figure 8, page ci-contre.

21.5. Fonctions trigonométriques hyperboliques réciproques

- La fonction **argument sinus hyperbolique**, $x \to \mathrm{Argsh}(x)$, est définie sur $\mathbb{R}$, impaire, croissante ;

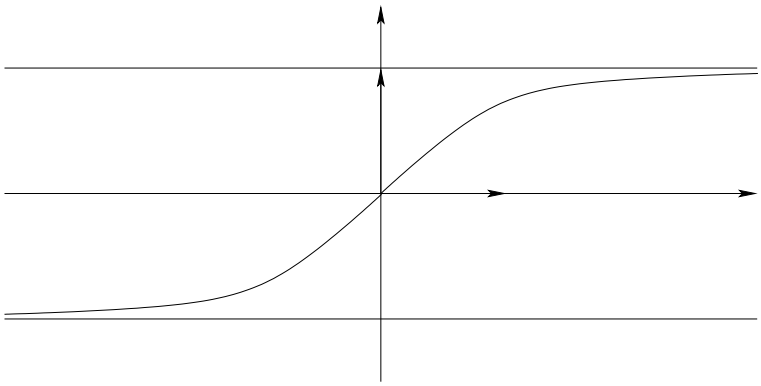


Figure 8 – ***Fonction tangente hyperbolique***

Le tableau de variation est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\operatorname{Argsh}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- La fonction **argument cosinus hyperbolique**, $x \to \operatorname{Argch}(x)$, est définie sur $[1, +\infty]$, croissante ;

Le tableau de variation est :

x	1		$+\infty$
$\operatorname{Argch}(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- La fonction **argument tangente hyperbolique**, $x \to \operatorname{Argth}(x)$, est définie sur $]-1,1[$, impaire, croissante ;

Le tableau de variation est :

x	-1		0		$+1$
$\operatorname{Argth}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Les deux fonctions $x \to \operatorname{Argch}(x)$ et $x \to \operatorname{Argsh}(x)$ sont tracées sur la figure 9, ci-dessous.

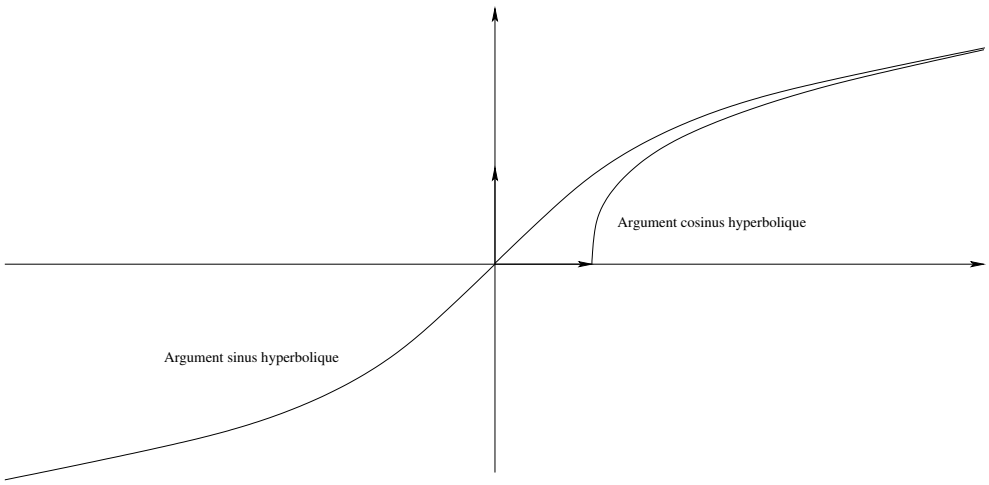


Figure 9 – ***Fonctions Argument cosinus et Argument sinus hyperboliques***

La fonction $x \to \operatorname{Argth}(x)$ est représentée sur la figure 10, page suivante.

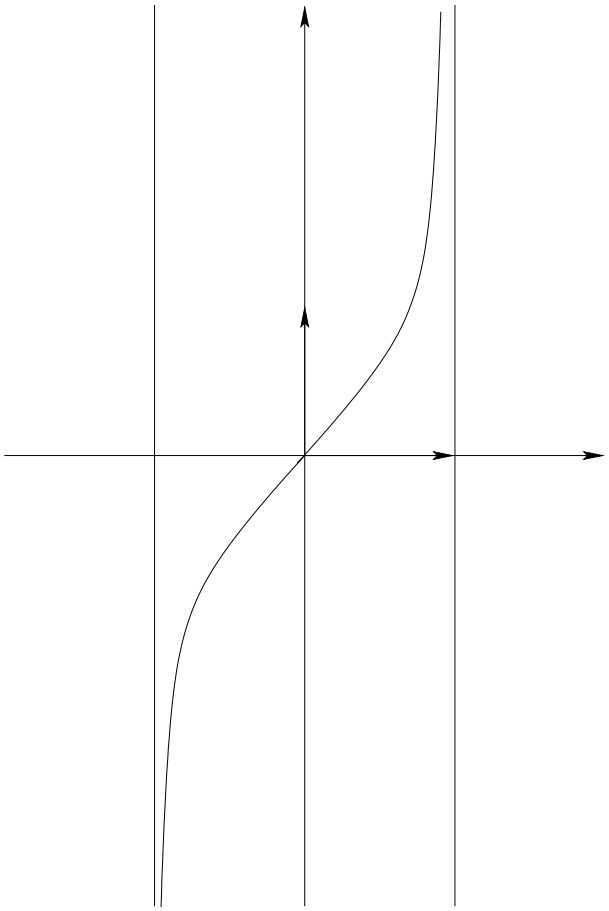


Figure 10 – ***Fonction Argument tangente hyperbolique***

21.6. Autres fonctions usuelles

Voir le tableau 1, page suivante, des dérivées et des développements limités usuels.
On ajoutera la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $\sin x$ qui est : $\sin(x + n\frac{\pi}{2})$, et celle de $\cos x$ qui est : $\cos(x + n\frac{\pi}{2})$.
On a indiqué l'ensemble de définition de f' quand il différait de celui de f.
Pour les deux dernières qui dépendent d'un paramètre a, on a indiqué les résultat valables pour a quelconque.

22. Trigonométrie

22.1. Propriétés élémentaires

Rappelons la relation fondamentale de la trigonométrie : $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$.
La figure 11, page 42, représente le cercle trigonométrique.
Les valeurs des lignes trigonométriques à connaitre sont :

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sin	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
tan	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$

Tableau 1 – FONCTIONS USUELLES

f	$\mathbf{D}_f$	f'	dl_n
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$	$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right)$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$	$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$
$\tan x$	$]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[+k\pi, k\in\mathbb{Z}$	$\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$x+\frac{x^3}{3}+o(x^4)$
$\arcsin x$	$[-1,1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(]-1,1[)$	$x+\frac{x^3}{6}+o(x^4)$
$\arccos x$	$[-1,1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(]-1,1[)$	$\frac{\pi}{2}-x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)}+o\left(x^{2n+2}\right)$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o\left(x^n\right)$
$\ln x$	$]0,+\infty[$	$\frac{1}{x}$	
$\ln(1+x)$	$]-1,+\infty[$	$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}+o\left(x^n\right)$
$\frac{1}{1+x}$	$\mathbb{R}\setminus\{-1\}$		$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+o\left(x^n\right)$
$\ln(1-x)$	$]-\infty,+1[$	$-\frac{1}{1-x}$	$-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}+o\left(x^n\right)$
$\frac{1}{1-x}$	$\mathbb{R}\setminus\{1\}$		$\sum_{k=0}^{n}x^k+o\left(x^n\right)$
$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{sh} x$	$\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$
$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{ch} x$	$\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right)$
$\operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}=1-\operatorname{th}^2 x$	$x+o(x^2)$
x^a	$]0,+\infty[$ ou $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$	$a\,x^{a-1}$ $(a\neq 0)$	
$(1+x)^a$	$]-1,+\infty[$ ou $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$a(1+x)^{a-1}$	$1+\sum_{k=1}^{n}\frac{a(a-1)\ldots(a-k+1)}{k!}x^k+o\left(x^n\right)$

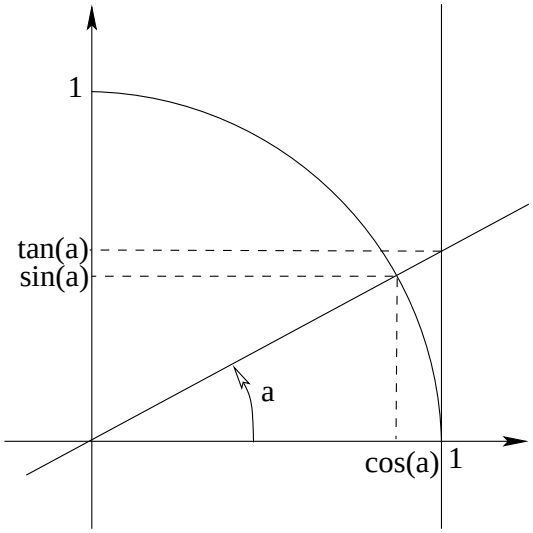


Figure 11 – **Cercle trigonométrique**

22.2. Symétries

$$\begin{array}{lll}
\sin(-x) = -\sin x & \cos(-x) = \cos x & \tan(-x) = -\tan x \\
\sin(x+\pi) = -\sin x & \cos(x+\pi) = -\cos x & \tan(x+\pi) = \tan x \\
\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x & \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x & \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{1}{\tan x} \\
\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x & \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x & \tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan x} \\
\sin(x+n\pi) = (-1)^n \sin x & \cos(x+n\pi) = (-1)^n \cos x & \tan(x+n\pi) = \tan x
\end{array}$$

22.3. Arc double

$$\cos 2a = \begin{cases} \cos^2 a - \sin^2 a \\ 2\cos^2 a - 1 \\ 1 - 2\sin^2 a \end{cases} \qquad \sin 2a = 2\sin a \cos a \qquad \tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \qquad \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2} \qquad \tan^2 a = \frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$$

22.4. Sommes d'arcs

$$\begin{array}{ll}
\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a & \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \\
\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a & \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b \\
\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1-\tan a\tan b} & \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a\tan b}
\end{array}$$

Notons le cas particulier : $\dfrac{1+\tan a}{1-\tan a} = \tan\left(a+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

22.5. Transformation de produits en sommes

$$\cos a\,\cos b = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2} \qquad \sin a\,\sin b = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$$

$$\sin a\,\cos b = \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$$

22.6. Transformation de sommes en produits

$$\sin p+\sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad \cos p+\cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p-\sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2} \qquad \cos p-\cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\tan p+\tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$$

22.7. Formule de Moivre

$$(\cos a+i\sin a)^n = \left(e^{ia}\right)^n = e^{ina} = \cos na+i\sin na$$

22.8. Fonctions réciproques

$$\arcsin : [-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \qquad \arccos : [-1,1]\to[0,\pi] \qquad \arctan : \mathbb{R}\to\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

$$\arccos x+\arcsin x = \frac{\pi}{2} \qquad \arctan x+\arctan\frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x>0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x<0 \end{cases}$$

$$\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$
$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

22.9. Pour le calcul intégral

$$\text{Si } t=\tan\frac{\theta}{2},\quad \text{alors :} \qquad \tan\theta=\frac{2t}{1-t^2}, \qquad \sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}\theta=\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

23. Recherche de primitives

23.1. Fraction rationnelle en x

On décompose la fraction rationnelle en éléments simples :

- les termes en $\dfrac{1}{x-a}$, s'intégrent en $\ln|x-a|$
- les termes en $\dfrac{1}{(x-a)^p}$, s'intégrent en $\dfrac{1}{1-p}\times\dfrac{1}{(x-a)^{p-1}}$
- les termes en $\dfrac{ax+b}{x^2+px+q}$, avec $\Delta<0$, s'intégrent en écrivant : $\dfrac{ax+b}{x^2+px+q} = \dfrac{\frac{a}{2}\times(2x+p)}{x^2+px+q}+\dfrac{\left(b-\frac{a}{2}p\right)}{x^2+px+q}$
  - en $\ln\left(x^2+px+q\right)$ pour le terme : $\dfrac{\frac{a}{2}\times(2x+p)}{x^2+px+q}$, et ensuite,
  - en arctan pour le nouveau terme constant : $\dfrac{\left(b-\frac{a}{2}p\right)}{x^2+px+q}$.

23.2. Fractions rationnelles diverses

Dans tous les cas, on indique un changement de variable pour $u=\ldots$ obtenir une fraction rationnelle en u.

a/ Fraction rationnelle en e^x, $\operatorname{ch}x$, $\operatorname{sh}x$

Poser $u=e^x$.

b/ Fraction rationnelle en x et $\sqrt{ax+b}$

Poser $u=\sqrt{ax+b}$.

c/ Fraction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$

Règle de Bioche : on regarde si $f(x)\,\mathrm{d}x$ est invariant quand on change

- x en $-x$, poser alors : $u = \cos x$,
- x en $\pi - x$, poser alors : $u = \sin x$,
- x en $\pi + x$, poser alors : $u = \tan x$,

en cas d'échec, poser $u = \tan\dfrac{x}{2}$. Voir à ce propos le paragraphe 22.9..

23.3. Polynôme × exponentielle

On peut :

- Intégrer par parties en diminuant le degré du polynôme ou,
- chercher une primitive de la même forme avec un polynôme du même degré.

23.4. Primitives usuelles

Voir le tableau 2, page suivante, des primitives usuelles.

> Notons qu'une primitive n'a de sens que sur un intervalle. Si on change d'intervalle, il y a au moins la constante qui change, mais pas seulement. En effet $\ln(x)$ peut devoir être changé en $\ln(-x)$ ... C'est pourquoi, dans un premier temps, dans un calcul de primitive, on écrira toujours un logarithme avec une valeur absolue.

24. Intégrale de Riemann (ou intégrale simple)

24.1. Primitive

Théorème : (Darboux) Une fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle. Deux primitives diffèrent d'une constante.

Définition : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$, avec F une primitive de f.

> Dans un repère orthonormal, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est aussi l'aire **algébrique** délimitée par la courbe et l'axe Ot de la variable entre $t = a$ et $t = b$.

Théorème : (Chasles) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$, avec f continue sur la réunion des intervalles.

Théorème : (Linéarité) $\displaystyle\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

24.2. Inégalités

Théorème : $\left.\begin{array}{r}\forall t \in [a,b]\,,\quad f(t) \leqslant g(t)\\ a < b\end{array}\right\} \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

Théorème : (Valeur absolue ou module) $a < b \Rightarrow \left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$

Théorème : (Moyenne) $a < b \Rightarrow \left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant (b-a)\sup_{t\in[a,b]}|f(t)|$

Théorème : (Cauchy-Schwarz, cas réel) $a < b \Rightarrow \left(\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t$

Tableau 2 – PRIMITIVES USUELLES

Primitives simples		
Fonction	Primitive	Remarques
x^a	$\frac{x^{a+1}}{a+1}+C$	Sauf pour $a=-1$, sur $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{R}^*$, ou $\mathbb{R}_+^*$ selon le cas
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x+a}$	$\ln\lvert x+a\rvert+C$	Sur un intervalle privé de $-a$
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x+C$	Sur un intervalle de $]-1,1[$. Ou bien $-\arccos x+C'$
e^x	e^x+C	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x+C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x+C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x+C$	Sur un intervalle de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert+C$	Sur un intervalle de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x+C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x+C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
Utilisation de fonctions composées		
Fonction	Primitive	Remarques
$u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	Sur un intervalle où u est de classe $\mathscr{C}^1$, $n\neq-1$
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	Sur un intervalle où u est de classe $\mathscr{C}^1$, $u(x)\neq0$
$\frac{u'}{u^n}$	$\frac{1}{1-n}\frac{1}{u^{n-1}}$	Sur un intervalle où u est de classe $\mathscr{C}^1$, $u(x)\neq0$, $n\neq1$
$\frac{u'}{a^2+u^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}$	Sur un intervalle où u est de classe $\mathscr{C}^1$

Théorème : (Cauchy-Schwarz, cas complexe) $a<b \Rightarrow \left|\int_a^b f(t)g(t)\ \mathrm{d}t\right|^2 \leqslant \int_a^b \left|f^2(t)\right|\ \mathrm{d}t \times \int_a^b \left|g^2(t)\right|\ \mathrm{d}t$

24.3. Théorème des 3 conditions

Théorème : $\left.\begin{array}{c} \forall t\in[a,b],\quad f(t)\geqslant 0 \\ \text{f } \textbf{continue} \text{ sur } [a,b] \\ \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \forall t\in[a,b],\quad f(t)=0$

> On utilise souvent ce théorème quand on a un produit scalaire défini par une intégrale, pour montrer le caractère défini-positif de la forme quadratique.

24.4. Intégrale dépendant d'une borne

- f continue sur $[a,b]$, $F(x)=\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, et $F'(x)=f(x)$
- f continue sur $[a,b]$, u et v de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$, avec $\left\{\begin{array}{l} u([\alpha,\beta])\subset[a,b] \\ v([\alpha,\beta])\subset[a,b] \end{array}\right.$

  $\Rightarrow F(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ \mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$, $\quad F'(x)=f(v(x))\times v'(x)-f(u(x))\times u'(x)$

> On ne confondra pas ce théorème avec les suivants...

24.5. Continuité et dérivation sous $\int \ldots$ pour une intégrale simple

Théorème : (Continuité) $f:\left.\begin{array}{ccc} I\times[a,b] & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & f(x,t) \end{array}\right\}$ avec f continue sur $I\times[a,b]$

$\Rightarrow F$ définie par $F(x)=\int_a^b f(x,t)\ \mathrm{d}t$ est continue sur I

Théorème : (Classe $\mathscr{C}^1$) Si, **de plus**, f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$, continue sur $I\times[a,b]$,

$\Rightarrow F$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et, $F'(x)=\int_a^b \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t$

24.6. Intégration par parties et changement de variable pour une intégrale simple

- Intégration par parties : u et v de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$,

$$\int_a^b u(t)v'(t)\ \mathrm{d}t=\Big[u(t)v(t)\Big]_a^b-\int_a^b u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t$$

- Changement de variable : f continue sur $[a,b]$, φ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$, avec $\varphi([\alpha,\beta])\subset[a,b]$,

  $\Rightarrow \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\ \mathrm{d}t=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)\ \mathrm{d}u$

24.7. Calcul approché d'intégrales et sommes de Riemann

On va faire un calcul approché de la valeur d'une intégrale de f sur $[a,b]$ en divisant l'intervalle $[a,b]$ en n parties égales.

Les bornes de ces parties sont donc : $\quad a+k\dfrac{b-a}{n}$, pour $k\in\{0,1,\ldots,n\}$.

Sur chacun de ces intervalles de largeur $\frac{b-a}{n}$, qui sont : $\left[a+(k-1)\frac{b-a}{n}, a+k\frac{b-a}{n}\right]$, on approxime la fonction par la valeur à une de ses deux bornes.
Ce qui donne :

Théorème : f continue sur $[a,b]$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

Si de plus f est monotone, une figure montre facilement que l'une des deux sommes est un majorant, l'autre un minorant de l'intégrale.
Enfin, quand $[a,b] = [0,1]$, on obtient des sommes particulières appelées sommes de Riemann :

Théorème : f continue sur $[0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$$

25. Intégrale généralisée (ou intégrale impropre)

25.1. Convergence

Définition : f est localement intégrable sur $I \Leftrightarrow f$ est continue par morceaux sur I

Définition : $f : [a,b[\to \mathbb{R}$, continue sur $[a,b[$ admet une intégrale généralisée en b
$\Leftrightarrow \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ a une limite **finie** quand $x \to b^-$

> On a la même définition sur $[a,+\infty[$, $]a,b]$, ou $]-\infty,b]$. On écrira l'ensemble des théorèmes pour $[a,b[$
> Le lecteur adaptera les énoncés aux autres intervalles.
> Cependant le théorème dit du « faux-problème » n'est pas applicable à l'infini.

Théorème : (convergence absolue) $\int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge et : $\left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$

Théorème : Si f **est de signe constant** sur $[a,b[$, alors : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_a^b -f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$ sont de même nature.
La convergence de l'intégrale équivaut à sa convergence absolue.

Théorème : (faux problème) f continue sur $[a,b[$, admettant une limite **finie** en b^-, c'est à dire qu'elle est prolongeable par continuité (en un point fini b !), alors $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge

25.2. Fonctions positives

Théorème : (Riemann)
$$\begin{cases} \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\ \mathrm{d}x \text{ converge} & \Leftrightarrow \quad \alpha < 1 \\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\ \mathrm{d}x \text{ converge} & \Leftrightarrow \quad \alpha > 1 \end{cases}$$

Théorème : (Comparaison) $\forall t \in [a,b[,\quad 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$
$$\begin{cases} \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t \text{ converge} & \Rightarrow \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \text{ converge} \\ \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \text{ diverge} & \Rightarrow \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t \text{ diverge} \end{cases}$$

Théorème : (Equivalence)
$$\left.\begin{array}{r} f(t) \underset{b^-}{\sim} g(t) \\ f(t) \text{ de signe constant} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \text{ et } \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t \text{ sont de même nature}$$

25.3. Théorème des 3 conditions

Le théorème des 3 conditions est encore applicable pour les intégrales généralisée.

Théorème :
$$\left.\begin{array}{r} \forall t \in [a,b[\,, \quad f(t) \geqslant 0 \\ \text{f } \textbf{continue} \text{ sur } [a,b[\\ \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \text{ convergente et : } \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \forall t \in [a,b[\,, \quad f(t) = 0$$

> On utilise souvent ce théorème quand on a un produit scalaire défini par une intégrale, pour montrer le caractère défini-positif de la forme quadratique.

25.4. Intégration par parties et changement de variable pour une intégrale généralisée

a/ Intégration par parties

$$\left.\begin{array}{r} u \text{ et } v \text{ de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [a,b[\\ \lim\limits_{t\to b} u(t)v(t) \text{ existe et est finie} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b u(t)v'(t)\ \mathrm{d}t \text{ et } \int_a^b u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t \text{ sont de même nature}$$

et **si elles convergent** : $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\ \mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^{b^-} - \int_a^b u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t$

b/ Changement de variable

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ continue sur } I \\ \varphi \text{ monotone de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [\alpha,\beta[\\ \varphi([\alpha,\beta[) \subset I \end{array}\right\} \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\ \mathrm{d}t \text{ et } \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)\ \mathrm{d}u \text{ sont de même nature}$$

et **si elles convergent** : $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\ \mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)\ \mathrm{d}u$

25.5. Un procédé de convergence

- Si on a $\alpha < 1$ tel que $\lim\limits_{t\to 0} t^\alpha f(t) = 0$, alors $|f(t)| = o\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$,
  et donc $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$ converge absolument donc converge.
- Si on a $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = 0$, alors $|f(t)| = o\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$,
  et donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge absolument donc converge.

> Ceci n'est pas un théorème, il faut à chaque fois refaire la démonstration...

25.6. Continuité et dérivation sous $\int \ldots$ pour une intégrale généralisée

Théorème : (Continuité) $f : \left.\begin{array}{ccc} I \times [a,b[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & f(x,t) \end{array}\right\}$ avec f continue sur $I \times [a,b[$,

si $\exists \varphi$ telle que $\left.\begin{array}{r} \forall x \in I, \quad \forall t \in [a,b[\,, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t) \\ \int_a^b \varphi(t)\ \mathrm{d}t \text{ converge} \end{array}\right\} \Rightarrow F$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)\ \mathrm{d}t$ est continue sur I

Théorème : (Classe $\mathscr{C}^1$) Si, **de plus**, f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$, continue sur $I \times [a,b[$, et

si $\exists \psi$ telle que $\left.\begin{array}{l} \forall x \in I, \quad \forall t \in [a,b[\,, \quad \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \psi(t) \\ \displaystyle\int_a^b \psi(t)\ \mathrm{d}t \text{ converge} \end{array}\right\} \Rightarrow F$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et, $F'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t$

> Il est important que φ, et ψ, **ne dépendent pas de** x.
> Ce sont des fonctions réelles positives dont les intégrales convergent.

25.7. Ensemble de définition

L'ensemble de définition d'une fonction F de la variable x est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on peut effectivement calculer $F(x)$.
Ainsi, si on a :

- $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x,t)\ \mathrm{d}t$ ou,
- $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)\ \mathrm{d}t$ ou encore,
- $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$

L'ensemble de définition de F est l'ensemble des valeurs de x telles que :

- l'intégrale est simple, ou bien,
- l'intégrale est généralisée et convergente.

26. Intégrales doubles et triples

26.1. Description hiérarchique du domaine et intégrale

On ne peut calculer une intégrale multiple que si on a une description hiérarchique du domaine :

- Pour une intégrale double (figure 12, ci-dessous) : $(x,y) \in \Delta \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in [a,b] \\ y \in [u(x),v(x)] \end{array}\right.$

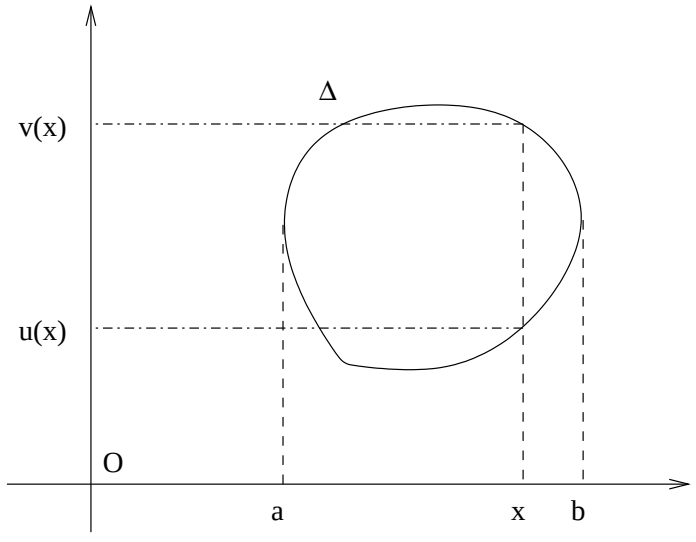


Figure 12 – **Intégrale double**

- Pour une intégrale triple (figure 13, page suivante) : $(x,y,z) \in \Delta \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in [a,b] \\ y \in [u(x),v(x)] \\ z \in [\alpha(x,y),\beta(x,y)] \end{array}\right.$

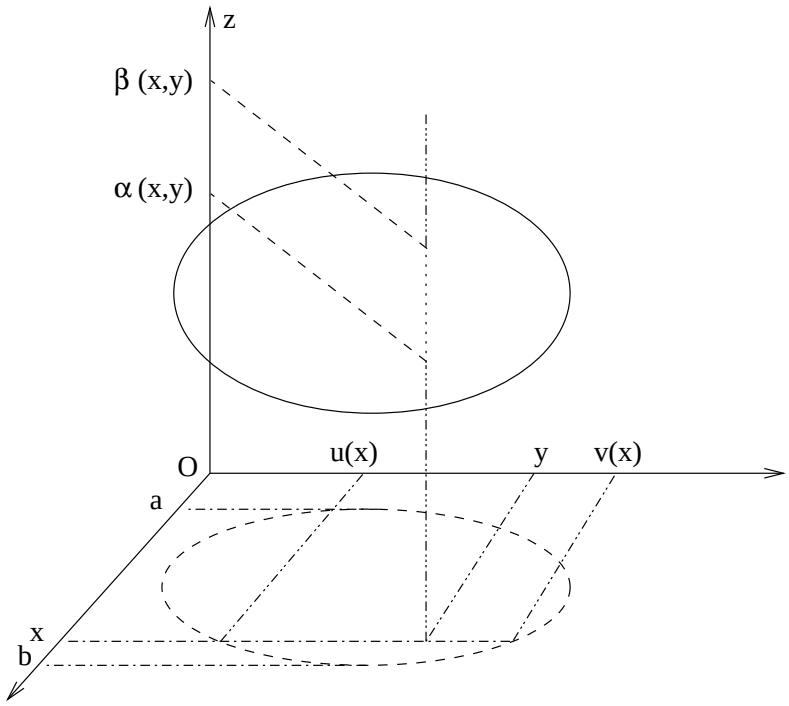


Figure 13 – **Intégrale triple**

On peut avoir les variables dans un autre ordre, l'important est que les bornes de chacune ne soient définies qu'en fonction des précédentes.

On définit alors les intégrales doubles et triples comme des intégrales simples emboîtées :

- $\iint_\Delta f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\ \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$
- $\iiint_\Delta f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\ \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$

26.2. Calcul d'Aires et de Volumes

On travaille ici dans un repère orthonormal.

- Dans le plan, l'aire **géométrique** du domaîne Δ est : $\mathscr{A} = \iint_\Delta \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$,
- Dans l'espace, le volume **géométrique** du domaîne Δ est : $\mathscr{V} = \iiint_\Delta \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$.

26.3. Inclusion des domaines

Théorème : Si f est continue et **positive** sur Δ, avec, de plus, $D \subset \Delta$, alors

$$\iint_D f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \leqslant \iint_\Delta f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

On a la même chose pour une intégrale triple.

26.4. Changement de variables

a/ Intégrale double

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \text{ bijective (ou presque...) } (x,y) \in D \Leftrightarrow (u,v) \in \Delta, \text{ et : } \quad f(x,y) = g(u,v)$$

$$\iint_D f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \iint_\Delta g(u,v) \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v$$

On notera la **valeur absolue** du jacobien et la pseudo-simplification.

b/ Intégrale triple

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases} \text{ bijective (ou presque...) } (x,y,z) \in D \Leftrightarrow (u,v,w) \in \Delta, \text{ et : } \quad f(x,y,z) = g(u,v,w)$$

$$\iiint_D f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \iiint_\Delta g(u,v,w) \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}w$$

On notera la **valeur absolue** du jacobien et la pseudo-simplification.

c/ Intégrale double en Polaires

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad (x,y) \in D \Leftrightarrow (\rho,\theta) \in \Delta, \text{ et : } \quad f(x,y) = g(\rho,\theta)$$

La figure 14, ci-dessous, indique le mode de calcul.

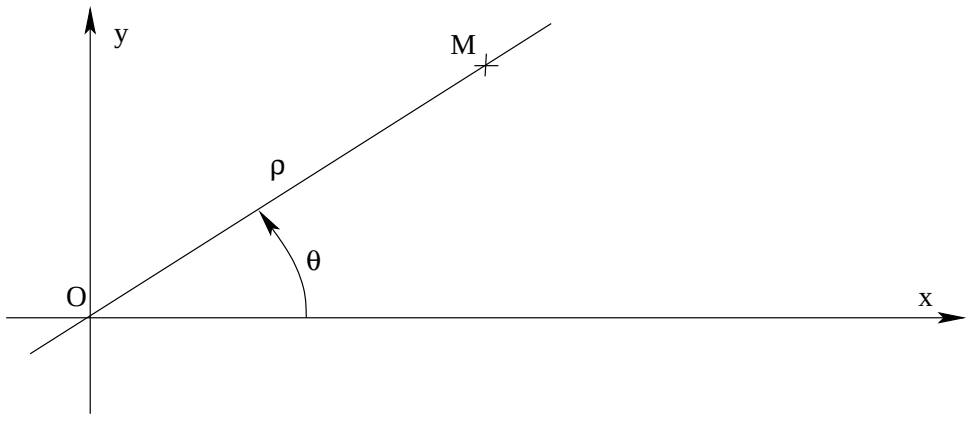


Figure 14 – $\iint_D f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \iint_\Delta g(\rho,\theta)\rho\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\theta$

d/ Intégrale triple en Cylindriques

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad (x,y,z) \in D \Leftrightarrow (\rho,\theta,z) \in \Delta, \text{ et : } \quad f(x,y,z) = g(\rho,\theta,z)$$

La figure 15, page suivante, indique le mode de calcul.

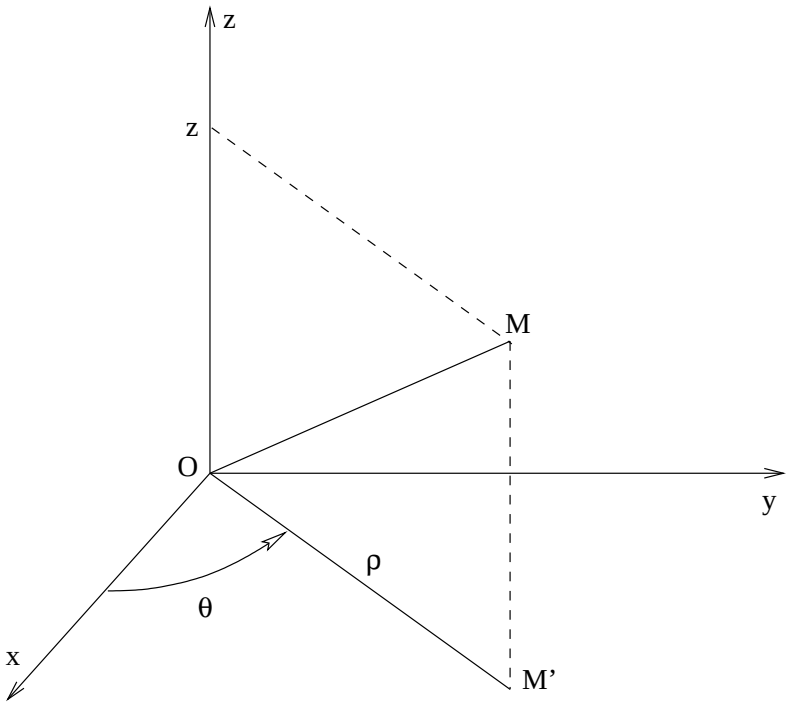


Figure 15 – $\iiint_D f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \iiint_\Delta g(\rho,\theta,z)\rho\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}z$

e/ Intégrale triple en Sphériques

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ z = z\sin\varphi \end{cases} \quad (x,y,z) \in D \Leftrightarrow (\rho,\theta,\varphi) \in \Delta, \text{ et : } \quad f(x,y,z) = g(\rho,\theta,\varphi)$$

La figure 16, ci-dessous, indique le mode de calcul.

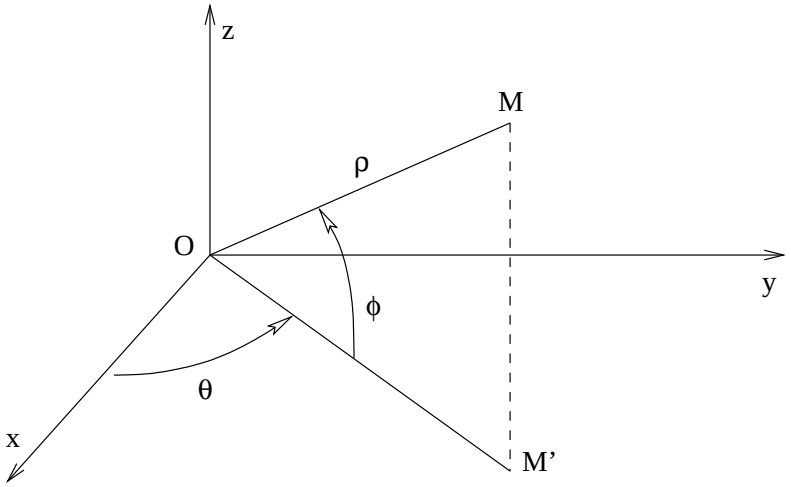


Figure 16 – $\iiint_D f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \iiint_\Delta g(\rho,\theta,\varphi)\rho^2\cos\varphi\ \ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\varphi$

Il s'agit de la convention des mathématiciens : les physiciens utilisent un autre angle.
En mathématiques, en général, $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Les physiciens utilisent l'angle entre Oz et OM qui appartient donc à $[0,\pi]$. Dans la formule, au niveau de la valeur absolue du jacobien, ils échangent ainsi $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$.
En plus, parfois, ils changent le nom des angles...

On fait un changement de variable
- pour simplifier le domaine, **ce qui est nouveau**,
- ou pour simplifier le calcul des primitives emboîtées.

27. Séries numériques (réelles ou complexes)

27.1. Convergence et Convergence Absolue

Définition : $\sum u_n$ **converge** $\Leftrightarrow$ la **suite des sommes partielles** (s_n) avec $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ converge.

Théorème : $\sum |u_n|$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge.

(règle $n^\alpha u_n$)
Si on a $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n\to\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors $|u_n| = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ et donc $\sum u_n$ converge absolument et donc converge.
Ceci n'est pas un théorème et est donc à réargumenter à chaque fois...

27.2. Séries géométriques

Théorème : La série de terme général x^n converge $\Leftrightarrow |x| < 1$.
De plus, la somme est : $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

Définition : Une suite **géométrique** est une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = a\,u_n$.
a est la **raison** de la suite.

La somme d'une série géométrique convergente est donc : $\dfrac{\text{« le premier terme »}}{1 - \text{« la raison »}}$.
Ceci prolonge et généralise la somme des termes d'une suite géométrique qui est :

$$\frac{\text{« le premier terme »} - \text{« le premier terme manquant »}}{1 - \text{« la raison »}}$$

Quand la série converge, il n'y pas de termes manquants...

27.3. Séries positives

Théorème : (Riemann) $\quad u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^\alpha} \Rightarrow \left(\sum u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 1\right)$

Théorème : (Comparaison) $\left.\begin{array}{c} 0 \leqslant u_n \leqslant v_n \\ \sum v_n \text{ converge} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum u_n$ converge.

Corollaire : $\left.\begin{array}{c} 0 \leqslant u_n \leqslant v_n \\ \sum u_n \text{ diverge} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum v_n$ diverge.

Théorème : (Equivalence) $\left.\begin{array}{r} 0 \leqslant u_n \\ u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \end{array}\right\} \Rightarrow \sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Théorème : (d'Alembert) $\sum u_n$ à terme strictement positifs,

telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$ $\quad \begin{cases} l < 1, & \sum u_n \quad \text{converge} \\ l > 1, & \sum u_n \quad \text{diverge grossièrement} \\ l = 1, & \text{on ne sait rien} \end{cases}$

> On tombe très souvent sur le cas douteux ! Pour ne pas tomber sur le cas douteux, il est souvent nécessaire d'avoir la présence d'une factorielle ou d'un exposant dépendant de n. Les fonctions de Riemann fournissent toujours le cas douteux !...
> Ainsi on utilise le théorème de d'Alembert dans le cadre des séries entières, ou lorsqu'on a, dans l'expression de u_n, des factorielles, des termes de nature géométrique (a^n) ou des exponentielles.

27.4. Critère spécial des séries alternées

Définition : $\sum u_n$ est une série **alternée** $\Leftrightarrow (-1)^n u_n$ est de signe constant.

Théorème : $\sum u_n$ une série **alternée**

$\left.\begin{array}{r} (|u_n|) \searrow \\ \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum u_n$ converge.

De plus, $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$, où $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$,

enfin, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ est du signe de u_0, R_n est du digne de u_{n+1}

Voir la figure 17, ci-dessous.

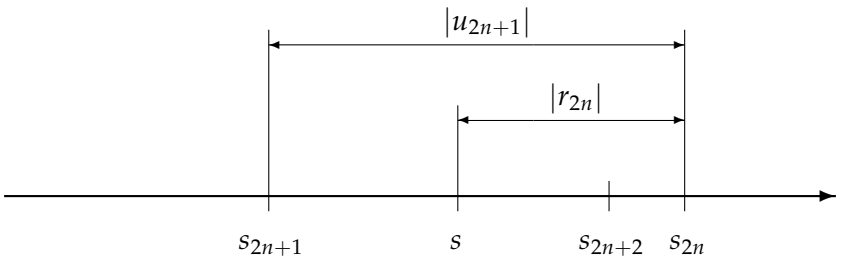


Figure 17 – **Convergence d'une série répondant au critère special**

27.5. Comparaison d'une série et d'une intégrale

Théorème : f une fonction **positive et décroissante** définie sur $\mathbb{R}_+$, $\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\sum f(n)$ sont de même nature.

Et si elles convergent : $\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$

La figure 18, page ci-contre, donne les inégalités de base !
Il ne faut pas hésiter à la refaire pour retouver ces inégalités.

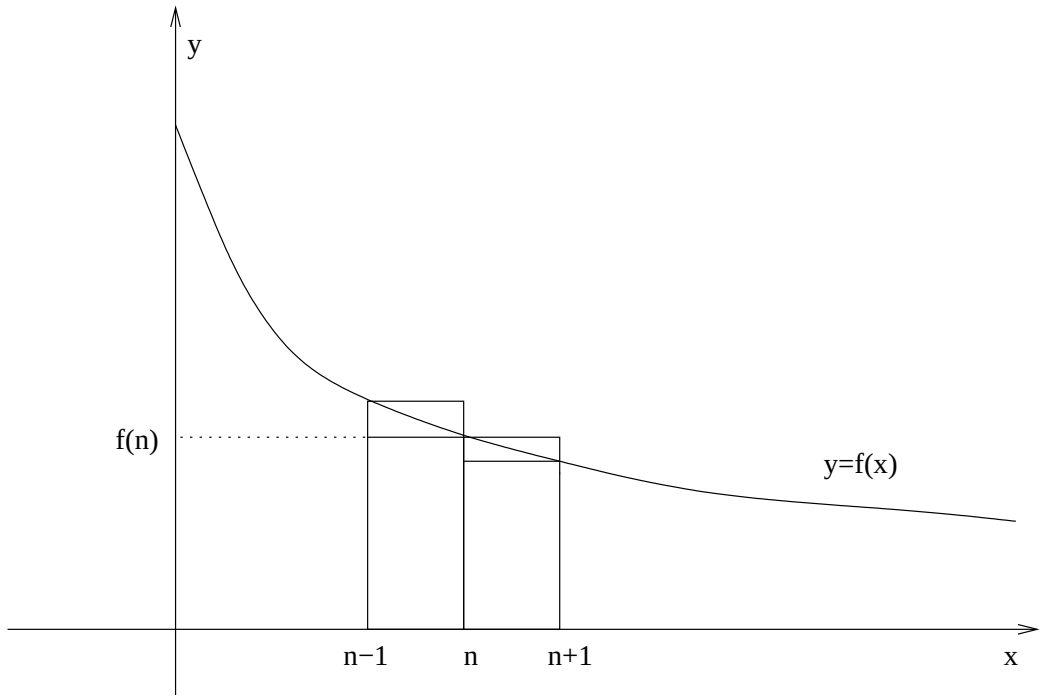


Figure 18 – **Comparaison série-intégrale**

27.6. Suite et série des différences

Théorème : La suite (u_n) converge $\Leftrightarrow$ La série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge

> Cela sert parfois à montrer la convergence de quelques ... suites, en montrant la convergence ou la convergence absolue de la série des différences.

27.7. Calcul exact de sommes de séries

On dispose principalement de trois techniques

- Utilisation de séries entières par leur valeur en un point.
- Utilisation de séries de Fourier par leur valeur en un point ou la formule de Parseval.
- Calcul effectif de la limite de la suite des sommes partielles où les termes s'en vont en dominos.

  Le cas le plus simple étant : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$

27.8. Calcul approché de sommes de séries

- Dans le cas d'une série alternée répondant au critère spécial, on applique ce critère.
- Dans les autres cas, on s'intéresse à la série des modules.
  - Si elle converge par application du critère de d'Alembert, majorer le reste par une série géométrique
  - Sinon, majorer le reste en utilisant une intégrale ou ...

28. Séries Entières

Définition : Une **série entière** est une série de la forme $\sum a_n z^n$ ou $\sum a_n x^n$, selon que l'on travaille sur $\mathbb{C}$ ou sur $\mathbb{R}$

28.1. Rayon de convergence

Pour rechercher le rayon de convergence R,

- utiliser le théorème de d'Alembert, R est, **s'il existe**, le réel positif tel que $\left|\frac{a_{n+1}R^{n+1}}{a_nR^n}\right|$, $\left(\text{ou} \quad \left|\frac{a_{2(n+1)}R^{2(n+1)}}{a_{2n}R^{2n}}\right|, \quad \text{ou}\dots\right)$ a pour limite 1 quand $n \to +\infty$
- si $\left|\frac{a_{n+1}R^{n+1}}{a_nR^n}\right|$ a toujours une limite nulle quand $n \to +\infty$, alors : $R = +\infty$
- si $\sum a_n x^n$ est semi-convergente $\Rightarrow R = |x|$
- en cas d'échec des méthodes précédentes, on utilise l'un des éléments suivants :
  - $R = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{r \in \mathbb{R}_+, \text{la suite } (a_nr^n) \text{ est bornée}\}$
  - $R = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{r \in \mathbb{R}_+, \text{la suite } (a_nr^n) \text{ tend vers } 0\}$

28.2. Convergence

Théorème : $\begin{cases} |z| < R \Rightarrow \sum a_n z^n & \text{converge absolument} \\ |z| > R \Rightarrow \sum a_n z^n & \text{diverge grossièrement} \\ |z| = R & \text{on ne sait rien a priori sur la convergence} \end{cases}$

La figure 19, ci-dessous, illustre ce théorème.

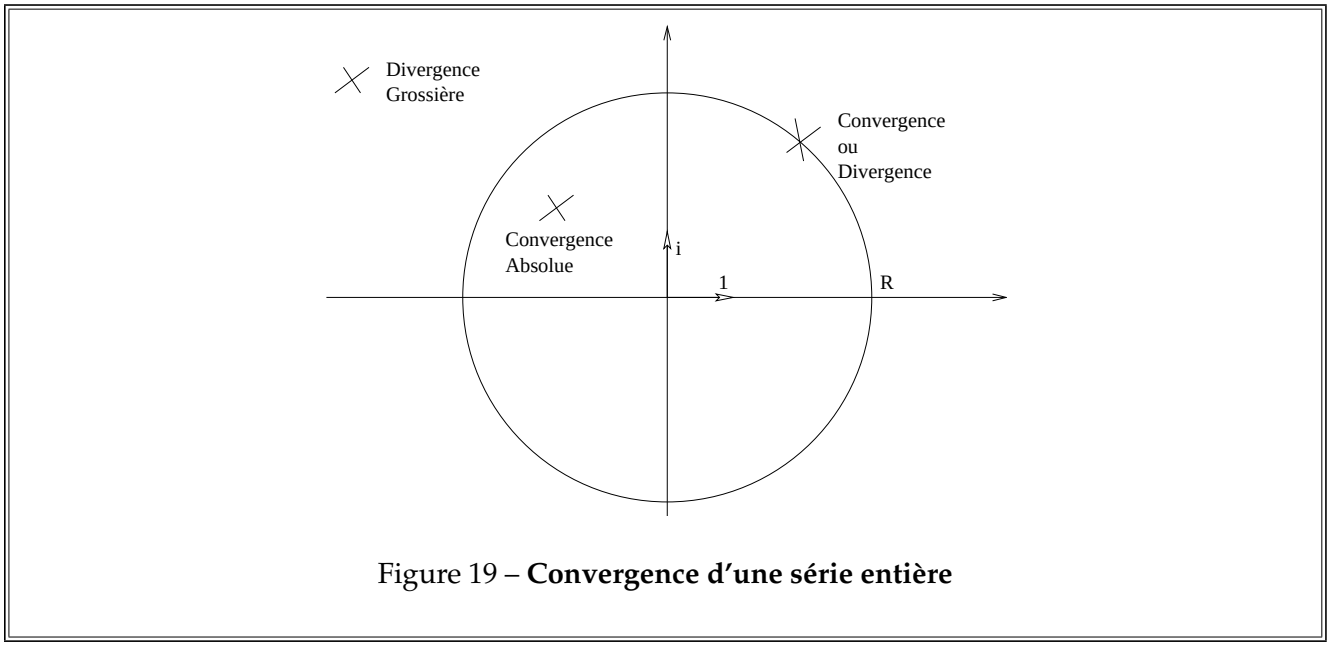


Figure 19 – **Convergence d'une série entière**

Théorème : Quand la variable est réelle, la série entière se dérive et s'intègre terme à terme sur $]-R,R[$ au moins.
Elle s'intègre même terme à terme au moins sur sur **l'intervalle de convergence**

Théorème : La série entière, sa série dérivée et ses séries primitives ont le même rayon de convergence.

Théorème : La somme d'une série entière est continue sur son ensemble de définition.

Théorème : La somme d'une série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$.

28.3. Somme de deux séries entières

Théorème : $\left.\begin{array}{ll}\sum a_n z^n & \text{de rayon } R_1 \\ \sum b_n z^n & \text{de rayon } R_2\end{array}\right\} \Rightarrow \sum (a_n + b_n) z^n$ est de rayon $\left\{\begin{array}{ll}\inf(R_1,R_2) & \text{pour : } R_1 \neq R_2 \\ R \geqslant R_1 & \text{pour : } R_1 = R_2\end{array}\right.$

28.4. Développement d'une fonction en série entière

Définition : Une fonction f est développable en série entière en 0

$\Leftrightarrow$ il existe une série entière et un intervalle I, contenant 0, tels que $\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

Théorème :

Si f est développable en série entière en 0 alors la série entière est la série de Taylor et : $\quad a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

En général I est l'intersection de l'ensemble de définition de f et de l'ensemble de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, mais cela n'est pas une obligation...
Pour développer une fonction en série entière, on peut :

- utiliser les séries entières usuelles.
  Assez souvent, parfois en dérivant, on fait apparaitre une fraction rationnelle. On la décompose alors en éléments simples sur $\mathbb{C}$ pour ensuite utiliser des séries géométriques...
- sur indication de l'énoncé, utiliser une équation différentielle.
- ou calculer la série de Taylor.

Dans tous les cas, il faudra avec soin justifier la convergence de la série entière **et son égalité** avec la fonction. Cela peut être délicat dans le cas de la série de Taylor... qu'on n'utilisera donc qu'à la demande de l'énoncé.

28.5. Séries entières usuelles

Voir le tableau 3, page suivante, des séries entières usuelles.
La série géométrique et l'exponentielle sont aussi valables pour une variable complexe.

28.6. Série entière solution d'une équation différentielle

- On considère au départ une série entière de rayon de convergence $R > 0$,
  solution de l'équation différentielle (E). On pose donc : $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
- Tout ce qu'on écrit est valable pour $x \in]-R,R[$. **Il faut dire** qu'on se place sur $]-R,R[$...
- On calcule y' et au besoin y'', on reporte dans l'équation.
- On éclate tout en sommes de séries entières.
- On **regroupe ce qui se regroupe naturellement**, les temes en x^n, ceux en x^{n-1}...
- Ensuite, on **réindexe pour trouver une série entière unique** et nulle.
- Alors, chaque coefficient est nul, par unicité du développement en série entière quand il existe. On a en général une relation de récurrence entre les coefficients. Cette relation permet normalement de calculer les coefficients mais aussi assez souvent de trouver directement le rayon de convergence, ce qui est indispensable.

29. Séries de Fourier

29.1. Série de Fourier et coefficients de Fourier de f

Définition : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, T-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, on appelle **série de Fourier de** f, la série :

$$S(f)(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t), \quad \text{avec : } \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Tableau 3 – DÉVELOPPEMENTS USUELS EN SÉRIE ENTIÈRE

$\mathbf{f}$	$\mathbf{D}_f$	DSE	R	I
e^x	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x}$	$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$	1	$]-1,1[$
$\ln(1+x)$	$]-1,+\infty[$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	1	$]-1,1]$
$\frac{1}{1-x}$	$\mathbb{R} \setminus \{1\}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	1	$]-1,1[$
$\ln(1-x)$	$]-\infty,1[$	$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$	1	$[-1,1[$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$	1	$[-1,1]$
$(1+x)^a$	$]-1,+\infty[$	$1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} x^n$	1 ou $+\infty$ $(a \in \mathbb{N})$	

On a $a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\ \mathrm{d}t$, et pour $n \geqslant 1$, $\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega t\ \mathrm{d}t = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\cos n\omega t\ \mathrm{d}t \\ b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\omega t\ \mathrm{d}t = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\sin n\omega t\ \mathrm{d}t \end{cases}$

a_0 est la valeur moyenne de f.
Dans le cas où f est paire ou impaire, on peut travailler sur une demi-période bien choisie. C'est à dire que, le plus souvent, les intégrales sont calculées entre 0 et $\frac{T}{2}$.
D'autre part, souvent, on ne dispose d'une formule explicite pour $f(t)$ que sur un certain intervalle. On veillera avec soin à ne pas utiliser cette formule **en dehors** de cet intervalle !

Si cela est plus facile, on peut calculer :

$$c_0 = a_0 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\ \mathrm{d}t, \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\, e^{-in\omega t}\ \mathrm{d}t = \frac{a_n - ib_n}{2} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*$$

Si la fonction est réelle, les a_n et b_n sont réels et on les obtient par un seul calcul ...

29.2. Cas où f est 2π-périodique

Dans le cas où f est 2π-périodique, $\quad S(f)(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ \mathrm{d}t, \quad \text{et pour } n \geqslant 1, \quad \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)\cos nt\ \mathrm{d}t \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)\sin nt\ \mathrm{d}t \end{cases}$$

- Si, de plus, f est paire : $\quad a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\ \mathrm{d}t, \quad$ et pour $n \geqslant 1, \quad \begin{cases} a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\ \mathrm{d}t \\ bn = 0 \end{cases}$
- ou si f est impaire : $\quad a_n = 0, \quad$ et pour $n \geqslant 1, \quad b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\ \mathrm{d}t$

Dans les séries de Fourier, assez souvent, on n'a de formule pour f que dans un certain intervalle, on veillera donc, comme on l'a déjà dit, à n'utiliser cette formule que sur cet intervalle...

29.3. Convergence

Théorème : (Dirichlet, cas général) f de classe $\mathscr{C}^1$ **par morceaux** sur $\mathbb{R}$, T-périodique
$\Rightarrow$ la série de Fourier de f converge en tous points, et sa somme est : $\quad S(f)(t) = \dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$
où $f(t+0)$ et $f(t-0)$ sont les limites à droite et à gauche de f en t.

> En tous points où f est continue, on a donc bien : $\quad S(f)(t) = f(t)$.
> Il n'y a qu'aux points où f est discontinue qu'il risque d'y avoir un problème. On fera donc un graphe de la fonction **sur un peu plus d'une période** pour repérer les points de discontinuité et vérifier le caractère $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Théorème : (Dirichlet, cas continu) f **continue** et de classe $\mathscr{C}^1$ **par morceaux** sur $\mathbb{R}$, T-périodique
$\Rightarrow$ la série de Fourier de f converge en tous points, et : $\quad S(f)(t) = f(t)$.
De plus, les séries $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ convergent.

Théorème : Sur un intervalle $[\alpha,\beta]$ où f est continue, $\quad \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\ \mathrm{d}t$ peut se calculer en intégrant terme à terme la série de Fourier de f.

> On ne confondra pas :
> - de classe $\mathscr{C}^1$ **par morceaux** sur $\mathbb{R}$;
> - et **continue**, et de classe $\mathscr{C}^1$ **par morceaux** sur $\mathbb{R}$.
>
> La première est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, et donc pas nécessairement continue sur $\mathbb{R}$...

Théorème : (Unicité du développement en série de Fourier)
Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et s'écrit comme la somme d'une série trigonométrique, on a :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

Alors, cette série est la série de Fourier de f.

29.4. Produit scalaire et formule de Parseval

Théorème : $\mathscr{C}_T(\mathbb{R})$, l'ensemble des applications **continues**, T-périodiques, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un espace vectoriel réel.
De plus $\quad \langle f,g\rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)g(t)\ \mathrm{d}t \quad$ est un produit scalaire de $\mathscr{C}_T(\mathbb{R})$.
La famille $\quad \left\{(\cos n\omega t)_{n\in\mathbb{N}}, (\sin n\omega t)_{n\in\mathbb{N}^*}\right\} \quad$ est orthogonale pour ce produit scalaire.

Si les applications sont simplement **continues par morceaux** , $\langle f,g\rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$ est une forme bilinéaire symétrique positive.

Théorème : (Formule de Parseval) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, T-périodique, **continue par morceaux** sur $\mathbb{R}$, alors :

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left|f^2(t)\right|\ \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}\left|f^2(t)\right|\ \mathrm{d}t = \left|a_0^2\right| + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left|a_n^2\right| + \left|b_n^2\right|\right)$$

Si la fonction est réelle :

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t)\ \mathrm{d}t = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

Si, de plus, f est 2π-périodique :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f^2(t)\ \mathrm{d}t = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

30. $\displaystyle\int \Sigma = \Sigma \int \ldots$

Problème : Il s'agit de montrer que : $\displaystyle\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t\right)$.
C'est à dire que l'intégrale d'une série est la série des intégrales.

Le problème n'est jamais évident. Il y a différentes solutions selon les intégrales. Toutes les justifications doivent se faire avec soin.

30.1. Série entière

Pour une série entière, on peut intégrer terme à terme sur tout intervalle inclus dans l'ouvert de convergence. Il suffit donc de rappeler qu'on a une série entière et que $[a,b] \subset]-R,R[$

30.2. Série de Fourier

Pour une série de Fourier correspondant à une fonction **continue** sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, on peut également intégrer terme à terme la série. Il suffit de rappeler ces conditions.

30.3. Autres cas

Que l'intégrale soit une intégrale simple ou une intégrale généralisée le traitement sera le même. L'idée est de sortir la somme partielle de la série par linéarité, il reste ensuite à montrer que l'intégrale du reste tend bien vers 0.

a/ Utilisation du critère spécial des séries alternées

Si à t fixé, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ converge par application du critère spécial des séries alternées,

on a alors : $\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)\right| \leqslant |f_{n+1}(t)|$

Il suffit alors de montrer que $\displaystyle\int_a^b |f_{n+1}(t)|\ \mathrm{d}t \to 0$ quand $n \to +\infty$

En effet, on écrit : $\displaystyle\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t = \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\left(\int_a^b f_k(t)\ \mathrm{d}t\right)}_{\text{somme partielle}} + \underbrace{\int_a^b \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)\right)\mathrm{d}t}_{\text{intégrale du reste}}$

et on majore ce dernier terme en valeur absolue. Enfin, on passe à la limite sur le terme de droite...

b/ Série géométrique

Si à t fixé, la série est géométrique, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)$ est aussi une série géométrique qui se calcule facilement. On calcule alors, ou on majore : $\int_a^b \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t) \right) \mathrm{d}t$

c/ Autres cas

Dans les autres cas, l'énoncé doit vous guider.
Le principe général est de majorer $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t) \right| \leqslant g_n(t)$
avec $\int_a^b g_n(t)\ \mathrm{d}t \to 0$ quand $n \to +\infty$ et d'appliquer le principe précédent.
Souvent, on vient de faire une telle majoration dans les questions précédentes...

> Si l'intégrale est une intégrale généralisée, il ne faut pas oublier de montrer la convergence de **toutes** les intégrales utilisées.

31. Fonctions $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

31.1. Limite et continuité

- Les fonctions « composantes » comme, par exemple, $(x,y,z) \to y$ sont continues.
- Les sommes, produit par un scalaire, produit, quotient (en un point où le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues sont continues.
- Les composées de fonctions continues sont continues.

Ceci permet de montrer la plupart des continuités usuelles.

Théorème : Une fonction de plusieurs variables, à valeurs réelles, **continue sur un fermé-borné** est **bornée** et **atteint ses bornes**.

31.2. Classe $\mathscr{C}^1$ et $\mathscr{C}^2$

Définition : f est de **classe** $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p \Leftrightarrow f$ admet p dérivées partielles continues sur $\mathscr{U}$
Quand ces dérivées partielles sont aussi de classe $\mathscr{C}^1$, on dit que f est de **classe** $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{U}$

Notation : La dérivée partielle de f par rapport à la $j^{\text{ème}}$ variable se note : $\mathrm{D}_j f$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$.

Prise au point (vecteur) a, elle se note donc : $\mathrm{D}_j f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

En dimension 2 ou 3, on remplace souvent x_1,x_2,x_3 par x,y,z.

Définition : Quand f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$, la **différentielle de** f en (x_0,y_0,z_0), est l'application linéaire :

$$(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\ \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\ \mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\ \mathrm{d}z$$

> On adapte au besoin cette définition en dimension p...

Théorème : Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, elle admet un développement limité à l'ordre 1 en tout point de $\mathscr{U}$ et on a :

$$f(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) + (z-z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) + \|u\|\,\varepsilon(u)$$

où $u = (x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ et $\lim\limits_{u\to(0,0,0)} \varepsilon(u) = 0$.

Théorème : (Schwarz) f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{U} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Théorème : (Fonctions composées)

$$\left.\begin{array}{rr} & x,y,z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \mathscr{C}^1 \text{ sur I} \\ f : & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \mathscr{C}^1 \text{ sur } x(I)\times y(I)\times z(I) \\ & F(t) = f(x(t),y(t),z(t)) \end{array}\right\} \Rightarrow F \quad \text{est} \quad \mathscr{C}^1 \text{ sur I, et :} \quad F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}z'(t)$$

> Si x,y,z dépendent de 2 ou 3... variables, on a le même résultat en remplaçant toutes les dérivées par des dérivées partielles.

31.3. Extrémums d'une fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x,y) \to z = f(x,y)$, une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Pour chercher ses extrémums :

- On cherche les points critiques, c'est à dire les points qui vérifient : $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$

  Les extrémums sont à chercher parmi ces points critiques.

- En chaque point critique (x_0,y_0), on calcule : $\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{cases}$
  - Si $s^2 - rt < 0$ (x_0,y_0) est un extrémum (minimum pour $r > 0$, maximum pour $r < 0$)
  - Si $s^2 - rt > 0$ (x_0,y_0) est un col
  - Si $s^2 - rt = 0$ on ne peut pas conclure, il faut étudier « à la main » le signe de $f(x,y) - f(x_0,y_0)$

32. Fonctions (ou suites) à valeur dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$

32.1. Limite et continuité

On peut toujours considérer que ce sont n fonctions (ou suites) « coordonnées » ou « composantes » à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou même dans le deuxième cas, $2n$ fonctions (ou suites) « coordonnées » ou « composantes » à valeur dans $\mathbb{R}$. Les notions de limite, de continuité, de dérivabilité (...) se ramènent aux propriétés équivalentes sur chacune des composantes.

32.2. Fonction $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, classe $\mathscr{C}^1$

Définition : La **matrice jacobienne** de f est, avec ici $n = 3$ et $p = 2$: $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{pmatrix} = J_f$

C'est la matrice dans la base canonique de la différentielle de f au point considéré.

Théorème : $\left.\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p, \text{ de classe } \mathscr{C}^1 \\ g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q, \text{ de classe } \mathscr{C}^1 \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f$ de classe $\mathscr{C}^1$ et : $J_{g\circ f} = J_g \times J_f$

32.3. Fonction $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, classe $\mathscr{C}^1$

Définition : La matrice jacobienne de f en un point est alors carrée d'ordre n.
Le **jacobien** de f en ce point est le déterminant de la matrice jacobienne.

Théorème : En un point où le jacobien de f est non nul, f définit localement une bijection et le jacobien de f^{-1} est l'inverse du jacobien de f.

> Les ∂ ne se pseudo-simplifient pas!
> Ainsi $\dfrac{\partial z}{\partial y} \times \dfrac{\partial y}{\partial x}$ ne vaut pas en général $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ et $\dfrac{1}{\frac{\partial y}{\partial x}}$ n'est pas $\dfrac{\partial x}{\partial y}$

33. Equations et systèmes différentiels

Notons d'abord qu'on résout une équation ou un système différentiels sur un **intervalle**.

33.1. Généralités

a/ Recollement de solutions

Pour recoller en c les solutions sur deux intervalles, f sur $]a,c[$ et g sur $]c,b[$ il faut chercher à égaler :

- les limites (finies) de f et g en c
- les limites (finies) de f' et g' en c
- et éventuellement les limites (finies) de f'' et g'' en c pour une équation différentielle du second ordre.

b/ Equation différentielle linéaire

Une équation différentielle **linéaire**

- du **premier ordre** est de la forme : $a(t)\,y' + b(t)\,y = g(t)$
- du **second ordre** est de la forme : $a(t)\,y'' + b(t)\,y' + c(t)\,y = g(t)$

$g(t)$ est appelé le second membre.
Les équation homogènes associées sont respectivement :

- $a(t)\,y' + b(t)\,y = 0$
- $a(t)\,y'' + b(t)\,y' + c(t)\,y = 0$

Pour une équation différentielle linéaire, la solution générale est toujours la somme de la solution générale de l'équation sans second membre, appelée aussi équation homogène associée, et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.
D'où l'importance de connaître une telle solution particulière.

> On ne tient compte des conditions initiales que lorsqu'on a obtenu la solution générale de l'équation (ou du système) **avec** second membre.

Sur un intervalle convenable, la solution générale de l'équation sans second membre est un espace vectoriel de dimension 1 pour une équation différentielle linéaire du premier ordre et 2 pour une équation différentielle linéaire du second ordre.

c/ Courbe intégrale

Si $y(x)$ est solution d'une certaine équation différentielle, la courbe $y = y(x)$ est dite **courbe intégrale** de cette équation différentielle.

33.2. Equation Différentielle Non Linéaire du premier ordre

On ne dispose d'aucun théorème sur les équations différentielles non linéaires ...

- En général, elle est à variables séparables, $f(t)\,\mathrm{d}t = g(y)\,\mathrm{d}y \Rightarrow \int f(t)\,\mathrm{d}t = \int g(y)\,\mathrm{d}y + K$
  C'est le seul cas que l'on doit savoir traiter.
- Sinon, il faut se laisser guider par l'énoncé !

33.3. Equation Différentielle Linéaire du premier ordre

- Sans second membre $a(t)y' + b(t)y = 0 \Rightarrow y(t) = Ke^{-\int \frac{b(t)}{a(t)}\,\mathrm{d}t}$ sur un intervalle I où a et b sont continues et où a ne s'annule pas. K étant un réel arbitraire.
- Avec second membre $a(t)y' + b(t)y = c(t)$ sur un intervalle I où a, b et c sont continues et où a ne s'annule pas.
  Il ne nous manque qu'une solution particulière : toute solution particulière est bonne à prendre !
  - Si l'équation différentielle est à coefficients constants et si le second membre est en $P(t)\,e^{kt}$, on peut appliquer la méthode décrite dans le paragraphe 33.4..
  - On peut, faute de mieux, chercher une solution particulière par la variation de la constante :
    $z(t) = K(t)y(t)$ où $y(t) = e^{-\int \frac{b(t)}{a(t)}\,\mathrm{d}t}$
    On reste en calcul formel le plus longtemps possible : les termes en $K(t)$ disparaissent, cela revient alors au calcul d'une primitive de $K'(t)$.

La variation de la constante n'est pas un procédé miraculeux ! Elle peut donner des calculs longs et difficiles. On la réserve donc au cas où **on n'a pas d'autre procédé** pour obtenir une telle solution particulière.

33.4. Equation Différentielle Linéaire du second ordre à coefficients constants

- Sans second membre $ay'' + by' + cy = 0$ on résout l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$
  Si on a :
  - Deux racines distinctes, la solution est : $y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$
  - Une racine double : $y(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$
  - Deux racines complexes : $r = \alpha \pm i\beta$ et dans le cas où on cherche les solutions sur $\mathbb{R}$:
    $y(t) = (\lambda \cos \beta t + \mu \sin \beta t)e^{\alpha t} = (k \cos \beta(t - t_0))e^{\alpha t}$
- Avec second membre $ay'' + by' + cy = P(t)\,e^{kt}$, où P est un polynôme.
  On cherche une solution particulière de la forme :
  - $Q(t)\,e^{kt}$ si k n'est pas racine de l'équation caractéristique ;
  - $t\,Q(t)\,e^{kt}$ si k est racine simple de l'équation caractéristique ;
  - $t^2\,Q(t)\,e^{kt}$ si k est racine double de l'équation caractéristique,

  avec $Q(t)$ un polynôme arbitraire de même degré que P.
  Un second membre en $P(t)\,e^{\alpha t}\,\cos \beta t$ se traite comme la partie réelle de : $P(t)\,e^{(\alpha + i\beta)t}$.

33.5. Equation Différentielle Linéaire du second ordre

- Sans second membre $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$ sur un intervalle I où a,b et c sont continues et où a ne s'annule pas, il faut se laisser guider par l'énoncé pour trouver une première solution.
  Si a,b,c sont des polynômes, on peut chercher une solution polynomiale en cherchant d'abord une condition nécessaire sur le degré.

- Avec ou sans second membre, en ayant une solution $y(t)$ de l'équation sans second membre, on peut chercher les solutions de la forme $z(t) = K(t)y(t)$ (Variation de la constante, à réserver au cas où on n'a pas d'autre procédé).
  On obtient une équation différentielle linéaire du premier ordre en $K'(t)$ avec ou sans second membre selon les cas.
  En pratique, on mène le calcul de façon théorique le plus longtemps possible.
- On ne cherche une solution sous forme de série entière qu'à la demande de l'énoncé.

33.6. Equation aux dérivées partielles

Ce sont des équations différentielles qui concernent des fonctions de plusieurs variables. On écrit ici les théorèmes avec simplement trois variables notées u, v et w. On note toujours ici $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$, et on cherche une fonction f, respectivement de classe $\mathscr{C}^1$ ou $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{U}$.

> Quand une dérivée partielle, par exemple par rapport à u, est nulle, en intégrant, il apparait naturellement une constante d'intégration.
> Mais, ici, cette *constante* est constante quand les autres variables, v et w, sont constantes...
> Cette *constante* est donc alors une fonction arbitraire de ces autres variables !

a/ Une dérivée partielle première nulle

Les solutions de : $\dfrac{\partial f}{\partial u} = 0$ sont : $f(u,v,w) = F(v,w)$
avec F une fonction quelconque de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$ – elle est alors considérée comme de 3 variables.

b/ Une dérivée partielle seconde nulle

Les solutions de :

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 0$ sont : $f(u,v,w) = u\,F(v,w) + G(v,w)$ avec F et G deux fonctions quelconques de classe $\mathscr{C}^2$;
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0$ sont : $f(u,v,w) = F(v,w) + G(u,w)$ avec F et G deux fonctions quelconques de classe $\mathscr{C}^2$.

c/ Autres cas

Dans les autres cas, l'énoncé doit vous donner :

- un changement de variables ;
- un changement de fonction inconnue

qui permet de se ramener à un des cas précédents !

33.7. Système Différentiel Linéaire du premier ordre

On ne traite que les systèmes à coefficients constants $X'(t) = AX(t)$ où A est une matrice carrée d'ordre n et $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ ou $X'(t) = AX(t) + B(t)$, où $B(t)$ est un vecteur second membre.

a/ Cas sans second membre

- Dans le cas où A est diagonalisable, on note $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$ les valeurs propres et $(U_1,U_2,\dots,U_n)$ une base de vecteurs propres associés. Alors

$$X(t) = \alpha_1 \,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\, U_1 + \alpha_2 \,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\, U_2 + \cdots + \alpha_n \,\mathrm{e}^{\lambda_n t}\, U_n$$

- Dans le cas où A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$ sur lequel on cherche les solutions, pour chaque couple de valeurs proprs non réelles, on peut directement remplacer
  - $\alpha\, e^{\lambda t} U + \overline{\alpha}\, e^{\overline{\lambda} t}\, \overline{U}$ par
  - $\beta \operatorname{Re}\left(e^{\lambda t} U\right) + \gamma \operatorname{Im}\left(e^{\lambda t} U\right)$ avec β et γ réels
- Dans le cas où A est triangularisable, non diagonalisable,
  on considère P de passage telle que $T = P^{-1}AP$ avec T triangulaire supérieure.
  - On pose $X(t) = PY(t)$ on obtient $X'(t) = PY'(t)$ car P est constant.
  - On reporte dans le système différentiel et on obtient $Y'(t) = TY(t)$.
  - On résout ce système en résolvant la dernière équation et en remontant équation par équation.
  - Enfin, $X(t) = PY(t)$ fournit le résultat.

b/ Cas avec second membre

Dans tous les cas, il faut considérer une matrice de passage P avec $D = P^{-1}AP$ ou $T = P^{-1}AP$ selon la diagonalisibilité ou pas. On obtient

- $Y'(t) = DY(t) + P^{-1}B(t)$ ou
- $Y'(t) = TY(t) + P^{-1}B(t)$ selon les cas.
- On résout équation par équation le système obtenu.

33.8. Système autonome de 2 équations différentielles

$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = \varphi(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = \psi(x,y) \end{array}\right\}$ avec φ et ψ continues sur $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, est un système autonome de deux équations différentielles.

On l'appelle système autonome parce que la variable t n'intervient pas, en dehors des dérivées, bien sûr.

- On peut essayer de l'intégrer en passant en complexes, $z = x + iy$, en polaires ou en suivant les indications de l'énoncé.
- On peut aussi le transformer en équation différentielle plus classique $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\psi(x,y)}{\varphi(x,y)}$
- Réciproquement, une équation différentielle $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\psi(x,y)}{\varphi(x,y)}$ peut se transformer en système autonome en « ajoutant » du temps « t »... à condition, bien sûr, que ce système autonome soit facile à intégrer!

Troisième partie

Géométrie

34. Barycentre

34.1. Barycentre de p points pondérés

$(A_1,A_2,\dots,A_p)$, p points affectés de coefficients : $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p)$

- Si $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p=0$, $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}$ est un vecteur constant.
- Si $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p\neq 0$, $\overrightarrow{MG}=\dfrac{\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}}{\sum_{i=1}^{p}\alpha_i}$ définit un unique point G barycentre des (A_i,α_i)

34.2. Associativité du barycentre

Théorème : (sous réserve que les barycentres utilisés existent)
G_1 barycentre de (A,α) et (B,β)
Alors le barycentre de $(G_1,\alpha+\beta)$, et (C,γ) est celui de (A,α) , (B,β) , (C,γ)

35. Vecteurs du plan et de l'espace

35.1. Produit scalaire

Définition : Le **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est : $\vec{u}\,.\,\vec{v}=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$

L'étude générale de la notion de produit scalaire est page 24.

35.2. Produit vectoriel

Définition : Le **produit vectoriel** des vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{w}$.
On a : $\|\vec{w}\|=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\left|\sin\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)\right|=\left|\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right|$,
et : le vecteur $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, de façon que le trièdre $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ soit direct.

35.3. Déterminants

Définition : Le **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est : $\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$

Définition : Le **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est : $\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right).\vec{w}=\vec{u}\,.\left(\vec{v}\wedge\vec{w}\right)$

L'étude générale des déterminants est page 22.

36. Droites et Plans affines

On travaille toujours ici dans un repère, choisi auparavent.
De plus, dès qu'il est question d'orthogonalité, de distance ou d'angle, ce repère est supposé **orthonormal**, sans que cela soit précisé à chaque fois.

36.1. Droites du plan

a/ En coordonnées cartésiennes

La droite d'équation : $ax+by+c=0$, $(a,b)\neq(0,0)$, est de vecteur directeur : $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et de vecteur normal : $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

La droite passant par : $M_0:\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$,
est d'équation : $\begin{vmatrix}x-x_0&\alpha\\y-y_0&\beta\end{vmatrix}=0$

b/ En représentation paramétrique

La droite passant par $M_0:\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$
est de représentation paramétrique : $\begin{cases}x=x_0+\lambda\alpha\\y=y_0+\lambda\beta\end{cases}$

c/ Pour passer d'une représentation à une autre

- De paramétriques en cartésiennes : éliminer λ entre les deux équations.
- De cartésiennes en paramétriques : $\begin{cases}x=\lambda\\y=-\dfrac{c}{b}-\dfrac{a}{b}\lambda\end{cases}$ par exemple pour $b\neq0$.

36.2. Plans de l'espace affine

a/ En coordonnées cartésiennes

Le plan d'équation : $ax+by+cz+d=0$, est de vecteur normal : $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

Le plan passant par $M_0:\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$ et de vecteur normal $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est d'équation : $\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\\z-z_0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0.$

b/ En représentation paramétrique

Le plan passant par $M_0:\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$ et de plan directeur engendré par $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{pmatrix}$ est de représentation paramétrique : $\begin{cases}x=x_0+\lambda\alpha+\mu\alpha'\\y=y_0+\lambda\beta+\mu\beta'\\z=z_0+\lambda\gamma+\mu\gamma'\end{cases}$

c/ Pour passer d'une représentation à une autre

- De paramétriques en cartésiennes :
  - éliminer λ et μ entre les trois équations
  - ou bien directement l'équation est : $\begin{vmatrix}x-x_0&\alpha&\alpha'\\y-y_0&\beta&\beta'\\z-z_0&\gamma&\gamma'\end{vmatrix}=0$
- De cartésiennes en paramétriques :
  - chercher un point $M_0:\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$ du plan,

- et chercher un vecteur $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ non nul, normal à $\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ par exemple $\begin{pmatrix}-b\\ a\\ 0\end{pmatrix}$ si $(a,b)\neq(0,0)$

  Le produit vectoriel de ces deux vecteurs fournit un second vecteur : $\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix}$ qui convient.

36.3. Droites de l'espace affine

- Par intersection de 2 plans d'équations : $\begin{cases} ax+by+cz+d=0\\ a'x+b'y+c'z+d'=0\end{cases}$

  Un vecteur directeur de la droite intersection de ces 2 plans est : $\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}a'\\ b'\\ c'\end{pmatrix}$
- En paramétriques, la droite passant par $M_0:\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\\ z_0\end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ $(\alpha,\beta,\gamma)\neq(0,0,0)$

  est de représentation paramétrique : $\begin{cases} x=x_0+\lambda\alpha\\ y=y_0+\lambda\beta\\ z=z_0+\lambda\gamma\end{cases}$

36.4. Angles

On travaille toujours dans un repère orthonormal direct.

- l'angle de 2 vecteurs ou de 2 droites ou de 2 plans vérifie : $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|}$, applicable avec les vecteurs directeurs des droites ou les vecteurs normaux des plans selon les cas.
- pour l'angle entre une droite et un plan, il faut appliquer la formule précédente avec un vecteur directeur de la droite et un vecteur normal au plan.
  Eventuellement le résultat est $\dfrac{\pi}{2}-\theta$ selon la question exacte posée.

36.5. Aires et Volumes élémentaires

On travaille dans un repère orthonormal.

- Dans le plan, l'aire **géométrique** du triangle A,B,C est : $\mathscr{A}=\dfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right|$
  C'est bien la valeur absolue du déterminant ...
- Dans l'espace, l'aire **géométrique** du triangle A,B,C est : $\mathscr{A}=\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$
- Dans l'espace, le volume **géométrique** du parallélépipède construit sur (AB,AC,AD) est :
  $\mathscr{V}=\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|$

L'aire algébrique dépend à chaque fois de l'orientation choisie.

36.6. Distances

On travaille toujours dans un repère orthonormal.

- La distance de $M_0:\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$ à la droite d'équation $ax+by+c=0$, est : $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
- La distance de $M_0:\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\\ z_0\end{pmatrix}$ au plan d'équation $ax+by+cz+d=0$, est : $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
- La distance de 2 droites non parallèles de l'espace : $\begin{cases} D_1:(A,\overrightarrow{u})\\ D_2:(B,\overrightarrow{v})\end{cases}$ est : $\dfrac{\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)\right|}{\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\|}$

- La distance d'un point M à une droite $D : \left(A, \overrightarrow{u}\right)$ est donnée par : $\dfrac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\right\|}{\left\|\overrightarrow{u}\right\|}$

37. Projecteurs et Symétries

Dans cette partie, on utilise la notion de sous-espaces vectoriels supplémentaires qui se trouve pages 16 et 17.

37.1. Projecteur

Définition : Un projecteur p d'un espace vectoriel E est un endomorphisme de E vérifiant : $p \circ p = p$.

Théorème : Soit p un projecteur de E, alors : $E = \ker p \oplus \operatorname{Im} p$.
Réciproquement, si F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, alors, si $x = x_F + x_G$, avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$, on peut définir p par : $p(x) = x_F$.
p est alors un projecteur de E. C'est le projecteur sur F parallèlement à G.

37.2. Symétrie

Définition : Une symétrie s d'un espace vectoriel E est un endomorphisme de E vérifiant : $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

Théorème : Soit s une symétrie de E, alors p défini par : $2p = s + \mathrm{Id}_E$ est une symétrie. C'est la symétrie par rapport à E_1, l'ensemble des vecteurs invariants, parallèlement à E_{-1}, le sous-espace propre associé à la valeur propre -1.
Réciproquement, si F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, alors, si $x = x_F + x_G$, avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$, on peut définir s par : $s(x) = x_F - x_G$.
s est alors une symétrie de E. C'est la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

38. Isométries

38.1. Isométries vectorielles et isométries affines

Définition : Une isométrie vectorielle φ de E est une application qui conserve la norme, c'est à dire :
$\forall \overrightarrow{u} \in E, \quad \left\|\varphi\left(\overrightarrow{u}\right)\right\| = \left\|\overrightarrow{u}\right\|$.

Définition : Une isométrie affine f de $\mathscr{E}$ est une application qui conserve les distances, c'est à dire :
$\forall A,B \in \mathscr{E}, \quad \left\|\overrightarrow{f(A)f(B)}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

Théorème : Un endomorphisme est une isométrie vectorielle si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est orthogonale.

Les matrices orthogonales sont page 27.

Théorème : Une application affine est une isométrie affine si et seulement si l'application linéaire associée est une isométrie vectorielle.

38.2. Symétries orthogonales

Théorème : Une **isométrie vectorielle** est une symétrie orthogonale $\Leftrightarrow$ Sa matrice dans une base orthonormale est symétrique.

La transformation est alors la symétrie orthogonale par rapport à l'ensemble des vecteurs invariants. On retrouve ces cas dans les paragraphes suivants.

Théorème : Une **isométrie affine** est une symétrie orthogonale $\Leftrightarrow$ l'isométrie vectorielle associée est une isométrie vectorielle **et** il y a des points fixes.

La transformation est alors la symétrie orthogonale par rapport à l'ensemble des points fixes.

> Dans le cas d'une symétrie orthogonale dans le plan ou l'espace **affine**, la matrice de l'isométrie vectorielle associée est encore orthogonale, mais on observera que ça n'est plus une condition suffisante.
> Il est nécessaire d'avoir des points fixes pour avoir une symétrie affine.

38.3. Recherche d'une symétrie orthogonale d'éléments géométriques donnés

a/ Isométrie vectorielle

On cherche les expressions de la symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle Δ ou à un plan vectoriel Π.
On écrit que $\dfrac{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}'}{2} \in \Delta$ ou Π et que $\overrightarrow{u}'-\overrightarrow{u}$ appartient à l'orthogonal de Δ ou Π.

b/ Isométrie affine

On cherche les expressions de la symétrie orthogonale par rapport à la droite D ou au plan P.
On écrit que le milieu du segment MM' appartient à D ou à P et que $\overrightarrow{MM'}$ appartient à l'orthogonal de la direction de D ou P.

38.4. Identification des Isométries Vectorielles

a/ symétries orthogonales

Si la matrice d'une isométrie vectorielle dans une base orthonormale est symétrique, l'isométrie vectorielle est une symétrie orthogonale.
C'est la symétrie orthogonale par rapport à l'ensemble des vecteurs invariants.

b/ Isométries vectorielles du plan

Dans une base orthonormale, la matrice est orthogonale.

- Isométrie directe : le déterminant vaut 1.
  C'est une rotation d'angle θ. La matrice est : $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
  Si $\theta = 0$, c'est l'identité, et si $\theta = \pi$, c'est « moins l'identité », la symétrie centrale.
- Isométrie indirecte : le déterminant vaut -1.
  C'est une symétrie orthogonale par rapport à la droite $D_{\frac{\theta}{2}}$ tournée de $\dfrac{\theta}{2}$ par rapport à l'axe Ox.
  La matrice est : $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

c/ Isométries vectorielles de l'espace

Dans une base orthonormale, la matrice est orthogonale.

- Isométrie directe : le déterminant vaut 1, le troisième vecteur est le produit vectoriel des 2 premiers.
  C'est l'identité ou une rotation d'axe dirigé par un vecteur propre associé à 1 : $\overrightarrow{e_1}$ et d'angle θ.
  On trouve θ,
  - en cherchant $\cos\theta$ par la trace qui vaut $1+2\cos\theta$
  - en cherchant le signe de $\sin\theta$ qui est celui de $\det\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u}, f(\overrightarrow{u})\right)$, avec $\overrightarrow{u}$, un vecteur quelconque, non colinéaire à $\overrightarrow{e_1}$.

  Si $\theta = 0$, c'est l'identité, et si $\theta = \pi$, c'est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe. Cette isométrie a, en principe, déjà été identifiée comme symétrie orthogonale.
- Isométrie indirecte : le déterminant vaut -1, le troisième vecteur est l'opposé du produit vectoriel des 2 premiers.
  On cherche la trace :
  - La trace vaut 1, ce qui revient à ce que 1 soit valeur propre.
    C'est une symétrie orthogonale par rapport au plan propre pour la valeur propre 1.

- La trace ne vaut pas 1, 1 n'est pas valeur propre, elle vaut $-1+2\cos\theta$.
  C'est la composée
  - d'une rotation d'angle θ et d'axe dirigé par un vecteur propre associé à la valeur propre -1 et
  - d'une symétrie par rapport au plan orthogonal à l'axe de la rotation.

  Le signe de $\sin\theta$ se trouve comme dans le cas d'une isométrie directe.

38.5. Identification des Isométries Affines

L'isométrie vectorielle associée s'obtient en « éliminant » les constantes. On regarde si cette isométrie vectorielle n'est pas une symétrie orthogonale.
On cherche ensuite les points fixes de l'isométrie affine.

a/ Isométries affines planes

- Il y a un ou plusieurs point fixes.
  L'isométrie a la même « description géométrique » que l'isométrie vectorielle associée, « recentrée » en un point fixe.
- Il n'y a pas de points fixes.
  L'isométrie vectorielle associée est une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle Δ.
  L'isométrie affine est la composée d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite D de direction Δ et d'une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.
  On trouve D et le vecteur de la translation en cherchant les points M tels que $\overrightarrow{MM'} \in \Delta$.
  On a alors : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{MM'}$

b/ Isométries affines de l'espace

- Il y a un ou plusieurs point fixes.
  L'isométrie a la même « description géométrique » que l'isométrie vectorielle associée, « recentrée » en un point fixe.
- Il n'y a pas de points fixes.
  - Isométrie directe : l'isométrie vectorielle associée est une rotation vectorielle.
    L'isométrie affine est un vissage. L'axe et le vecteur de translation sont donnés en cherchant les points M tels que $\overrightarrow{MM'}$ appartient à l'axe de la rotation vectorielle associée.
  - Isométrie indirecte :
    L'isométrie vectorielle associée est une symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel Π
    L'isométrie affine est la composée d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan P de direction Π et d'une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.
    On trouve P et le vecteur de la translation en cherchant les points M tels que $\overrightarrow{MM'} \in \Pi$
    On a alors : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{MM'}$

39. Similitudes

39.1. Similitude

Définition : Une similitude est une transformation du plan affine qui, en complexes, se met sous la forme : $z \mapsto az+b$.

On peut aussi se reporter page 13

39.2. Identification

On cherche d'abord si il y a un point fixe en résolvant : $z = az+b$.

- Si tous les points sont fixes, c'est l'dentité.
- Si il n'y a pas de point fixe, alors, c'est que $a=1$ et $b \neq 0$, c'est la translation de vecteur d'affixe b.

- Si il y a un unique point fixe Ω, d'affixe la solution de : $z = az + b$, dans le repère centré sur Ω, la transformation s'écrit : $Z \mapsto aZ$.
  - Si $|a| = 1$, alors $a = e^{i\theta}$, c'est la rotation de centre Ω et d'angle θ.
  - Sinon, $a = |a|e^{i\theta}$, c'est la composée de la rotation de centre Ω et d'angle θ et de l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$.

40. Courbes Planes

40.1. Etude et Tracé de Courbes d'équation $y = f(x)$

a/ Ensemble d'étude

On recherche l'ensemble de définition, les éventuelles parité ou imparité, la périodicité, pour aboutir à l'ensemble d'étude. On indiquera alors les transformations à appliquer à l'arc de courbe pour reconstituer la courbe entière.

b/ Etude des variations

L'étude des variations se fait le plus souvent en étudiant le signe de la dérivée, obtenu en utilisant au besoin une fonction auxiliaire.

> Pour le choix d'une fonction auxiliaire, il faut dans celle ci « isoler » les éventuels
> - logarithmes,
> - et arctangentes
>
> qui se transforment en fraction rationnelle quand on dérive.

c/ Limites aux bornes

On cherche les limites à toutes les bornes de l'ensemble d'étude, avec au besoin,
- l'étude du prolongement par continuité en cas de limite finie,
- et l'étude locale de la dérivabilité en ces points, pour placer la tangente.

d/ Inflexions

L'étude des inflexions se fait au moyen de la dérivée seconde : $f''(x_0) = 0$ caractérisent les points où il peut y avoir une inflexion géométrique.
Cette étude n'est faite qu'à la demande de l'énoncé.
Géométriquement, un point d'inflexion se caractérise par le fait que la courbe traverse sa tangente.

e/ Branches infinies

On a une branche infinie quand : $f(x) \to \pm\infty$ ou $x \to \pm\infty$
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, on a une asymptote verticale d'équation : $x = x_0$.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$, on a une asymptote horizontale d'équation : $y = b$.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

  Il faut continuer la recherche par : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$
  - si $a = \pm\infty$, on a une branche parabolique de direction Oy.
  - si $a = 0$, on a une branche parabolique de direction Ox.
  - si a est fini non nul, il faut continuer la recherche par : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = b$
    - si b est fini, on a une asymptote : $y = ax + b$
    - si b est infini, on a une branche parabolique de direction $y = ax$
    - si b n'a pas de limite, on a une branche infinie de direction asymptotique $y = ax$

f/ Centre de symétrie

- Quand f est impaire, l'origine est centre de symétrie de la courbe représentative de f.
- Le point de coordonnées (a,b) est centre de symétrie de la courbe si et seulement si $f(x)+f(2a-x)$ est constant, il vaut alors $2b$.

g/ Convexité

Une fonction 2 fois dérivable est convexe si et seulement si la dérivée seconde est positive.
Géométriquement, une courbe est convexe si et seulement si elle est en dessous de sa corde entre 2 points quelconques ou si et seulement si elle est au dessus de chacune de ses tangentes.
Une fonction convexe a sa concavité tournée vers le haut et une fonction concave a sa concavité tournée vers le bas.
La figure 20, ci-dessous, illustre la convexité.

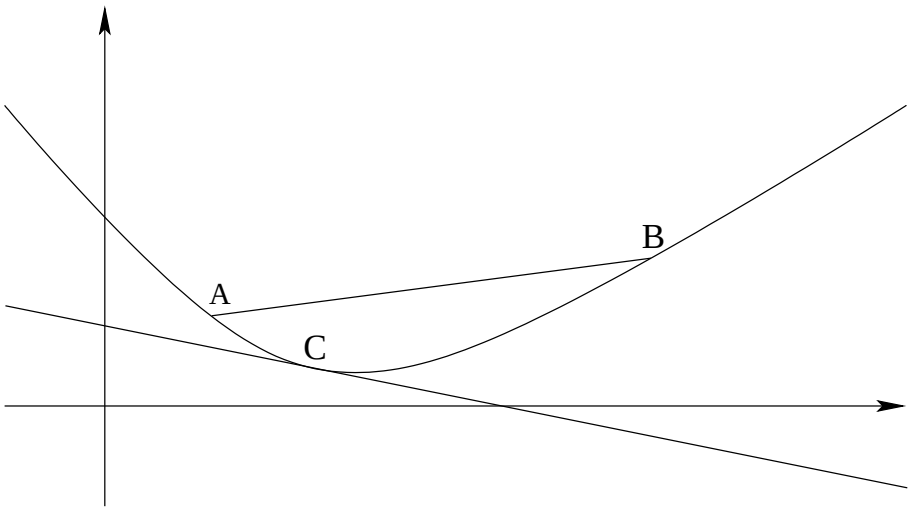


Figure 20 – **Une fonction convexe est sous sa corde entre 2 points et au dessus de ses tangentes**

40.2. Courbes planes en paramétriques

On a : $\begin{cases} x = f(t) = x(t) \\ y = g(t) = y(t) \end{cases}$

a/ Interprétation cimématique

Si on considère que t est le « temps », on peut considérer qu'on étudie le déplacement d'un « mobile » dans le plan (ou l'espace).
On utilise alors le vocabulaire suivant :

- la courbe est la **trajectoire** du mobile :
- le vecteur dérivé $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ est le **vecteur vitesse** du mobile, sa norme est sa **vitesse**.
- le vecteur dérivé seconde $\begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$ est le **vecteur accelération** du mobile, sa norme est son **accélération**.

b/ Ensemble d'étude

On recherche les ensembles de définition, les éventuelles parité ou imparité, les périodicités, pour aboutir à l'ensemble d'étude. On indiquera alors les transformations à appliquer à l'arc de courbe pour reconstituer la

courbe entière.

c/ Variations

On étudie les variations de f et g.
Il faut construire le tableau de variation, qui contient les lignes $x'(t)$, $x(t)$, $y(t)$, $y'(t)$ et $\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ qui représente la pente de la tangente.
Remarquons que si $\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ est une forme indéterminée en un point, on peut la remplacer par sa limite qui représente encore la pente de la tangente.

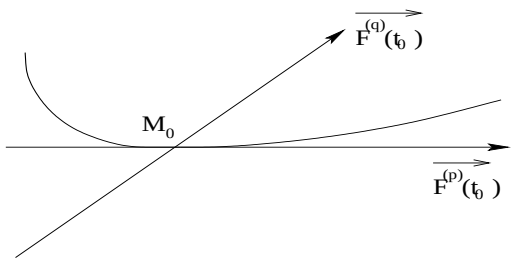
d/ Points stationnaires

Les points stationnaires vérifient : $\begin{cases} x'(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 0 \end{cases}$

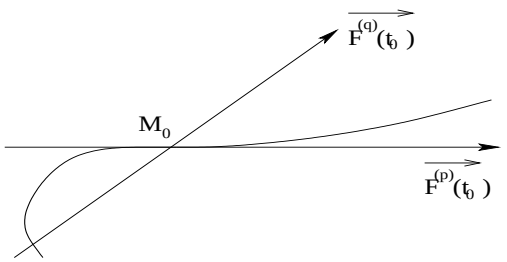
On appelle alors :

- p, avec $p \geqslant 1$, le premier rang où $\begin{pmatrix} x^{(p)}(t_0) \\ y^{(p)}(t_0) \end{pmatrix}$ est non nul, ce vecteur est alors tangent à la courbe.
- q, avec $q > p$, le premier rang où $\begin{pmatrix} x^{(q)}(t_0) \\ y^{(q)}(t_0) \end{pmatrix}$ est non colinéaire à $\begin{pmatrix} x^{(p)}(t_0) \\ y^{(p)}(t_0) \end{pmatrix}$

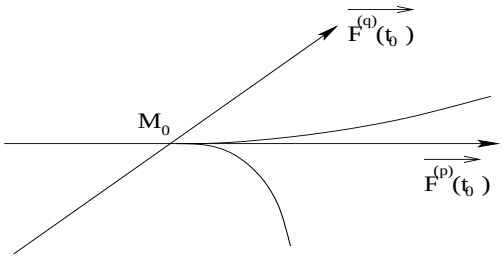
La courbe est toujours tangente à $\overrightarrow{F^{(p)}(t_0)}$,
la parité de p donne le signe de la coordonnée lorsque $t < t_0$,
la parité de q donne dans ce cas le signe de la deuxième coordonnée.
Dans les figures suivantes, le repère tracé est : $\left(M_0, \overrightarrow{F^{(p)}(t_0)}, \overrightarrow{F^{(q)}(t_0)}\right)$.
On peut voir sur la figure 21, ci-dessous, l'ensemble des cas.



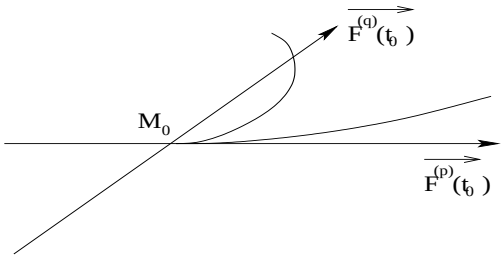
p impair et q pair : point ordinaire



p impair et q impair : point d'inflexion



p pair et q impair : point de rebroussement de 1ère espèce



p pair et q pair : point de rebroussement de 2ème espèce

Figure 21 – **Etude locale d'une courbe paramétrée**

Remarquons que si la tangente est verticale ou horizontale, le calcul de q est inutile, les variations permettent alors de déterminer directement la nature du point.

e/ Points d'inflexion

Les points d'inflexion géométrique vérifient nécessairement $\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} = 0$.

On ne fait cette étude qu'à la demande de l'énoncé.

f/ Branches infinies

L'étude des branches infinies ne pose de problème qu'au cas où f et g tendent vers l'infini.

- Si $y(t) \to \pm\infty$, et $x(t) \to l$, quand $t \to t_0$: on a une asymptote verticale d'équation $x = l$.
- Si $x(t) \to \pm\infty$, et $y(t) \to l$, quand $t \to t_0$: on a une asymptote horizontale d'équation $y = l$.
- Si $x(t)$ et $y(t) \to \pm\infty$, quand $t \to t_0$, on calcule $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)}$ appelée a :
  - si il n'y a pas de limite, on ne dit rien de plus,
  - si $a = \pm\infty$, on a une branche parabolique de direction Oy,
  - si $a = 0$, on a une branche parabolique de direction Ox,
  - dans les autres cas, on calcule $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) - ax(t)$ appelée b :
    - si il n'y a pas de limite, on a une branche infinie de direction asymptotique $y = ax$
    - si $b = \pm\infty$, on a une branche parabolique de direction $y = ax$
    - dans les autres cas, on a une asymptote $y = ax + b$

40.3. Courbes planes en polaires

Il s'agit d'étudier les courbes définies en coordonnées polaires par : $\rho = f(\theta) = \rho(\theta)$

a/ Ensemble d'étude

On cherche l'ensemble de définition, la périodicité éventuelle, on obtient un premier intervalle : celui-ci doit être un multiple de la période et de 2π.
On cherche ensuite à réduire cet intervalle.
On essaye de comparer $\rho(\theta)$ à : $\rho(-\theta)$, $\rho(\theta+\pi)$, $\rho(\pi-\theta)$, et $\rho(\dfrac{\pi}{2}-\theta)$.
On en déduit l'ensemble d'étude et d'éventuelles symétries de la courbe.

b/ Variations

On ne fait l'étude des variations de ρ par le signe de ρ' que si **si cette étude est simple !**
On peut très bien s'en passer pour tracer la courbe.

c/ Signe de ρ

L'étude du signe de ρ est par contre **indispensable**.
Elle qui figure dans le tableau de « variations » et permet de déterminer dans quel cadran on trace la courbe.

> Notons bien que, dans l'étude des courbes en polaires, ρ peut être **négatif**.

La figure 22, page suivante, montre un exemple de ρ négatif.

d/ Tangentes

On étudie la tangente en quelques points particuliers, en utilisant : $\tan V = \dfrac{\rho}{\rho'}$, qui fournit l'angle, orienté, entre le rayon vecteur et la tangente.
En un point où $\rho(\theta_0) = 0$, la tangente à la courbe est toujours la droite $\theta = \theta_0$.
La figure 22, déjà vue, et la figure 23, page ci-contre, précisent les angles utilisés.

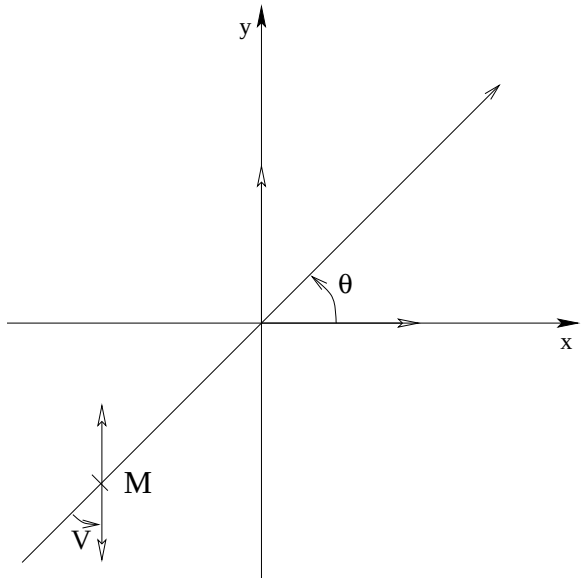


Figure 22 – **Exemple où :** $\theta = \pi/4$, $\rho = -\sqrt{2}$ **et** $V = \pi/4$

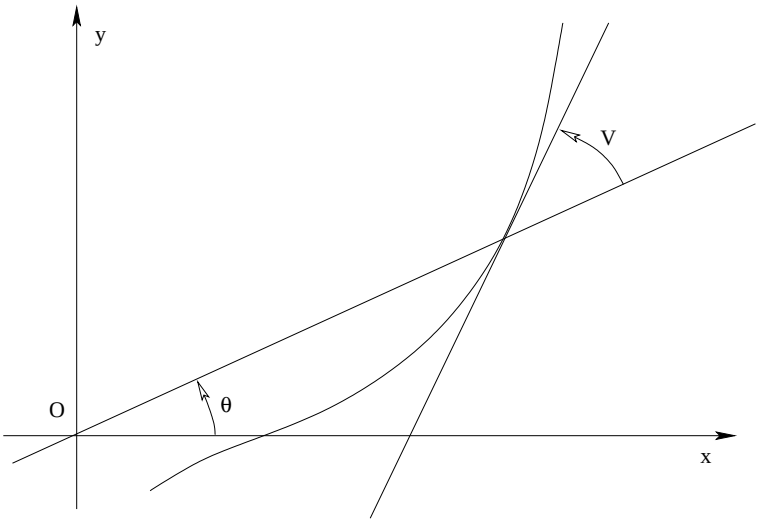


Figure 23 – **Tangente en polaires :** $\tan V = \dfrac{\rho}{\rho'}$

e/ Branches infinies

Pour l'étude des branches infinies, on cherche : $\lim\limits_{\theta \to \theta_0} \rho(\theta) \sin(\theta - \theta_0)$, qui est Y dans le repère tourné de θ_0.
Tout se passe maintenant dans le repère tourné de θ_0.

- s'il n'y a pas de limite, on a une branche infinie de direction asymptotique OX
- cette limite est infinie, on a une branche parabolique de direction OX
- cette limite est finie Y_0, on a une asymptote d'équation $Y = Y_0$
  La figure 24, page suivante, indique la position de l'asymptote.

f/ Points d'inflexion

On cherche les points d'inflexion parmi les points où la courbure est nulle.
Ce sont les points qui vérifient : $\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = 0$.

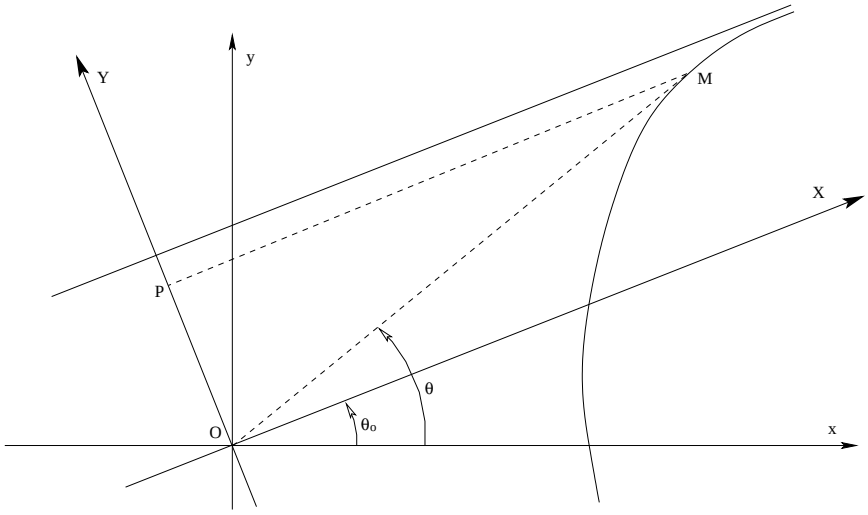


Figure 24 – **Asymptote en polaires**

On ne fait cette étude qu'à la demande de l'énoncé.

40.4. Courbes usuelles en polaires

- On a les coniques d'équation $\rho = \dfrac{p}{1+e\cos\theta}$
  Voir page 83.
- $\rho = \dfrac{A}{\cos(\theta-\theta_0)}$ est une droite Δ
- $\rho = A\cos(\theta-\theta_0)$ est le cercle passant par O de diamètre A et de centre sur la droite $\theta = \theta_0$

41. Courbure et Rayon de Courbure

41.1. Rayon de courbure d'une courbe plane

Définition : s, **l'abscisse curviligne** dans le sens des t ou θ croissants vérifie, selon les cas :

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,\mathrm{d}\theta$$

Définition : $\left(\Omega,\vec{T},\vec{N}\right)$ est le **repère de Frenet** au point Ω avec : $\vec{T} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}}{\left\|\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right\|}$

et $\left(\vec{T},\vec{N}\right)$ est orthonormal direct.

Définition : Le **rayon de courbure** R, la **courbure** γ sont donnés par : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = \gamma\vec{N} = \dfrac{1}{R}\vec{N}$

et on a aussi : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}s} = -\gamma\vec{T} = -\dfrac{1}{R}\vec{T}$

- $R > 0$, on tourne à gauche (la courbe est orientée)
- $R < 0$, on tourne à droite.

La convention est différente de celle des physiciens pour lesquels R est le rayon de courbure géométrique, c'est à dire qu'on a toujours, en physique, $R > 0$.

Définition : Le **centre de courbure** Ω est donné par : $\Omega = M + R\overrightarrow{N}$

La figure 25, ci-dessous, donne l'ensembles des éléments géométriques

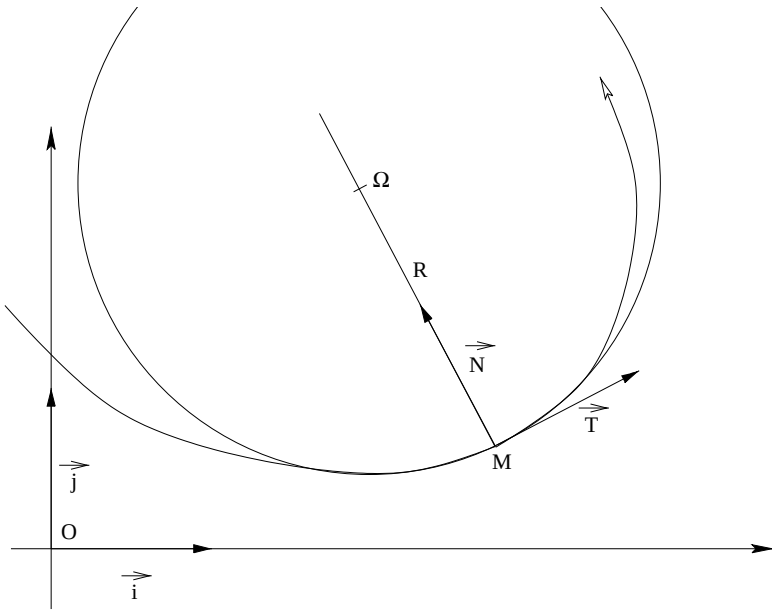


Figure 25 – **Repère de Frenet et centre de courbure**

41.2. Recherche de la courbure

Dans le cas paramétrique ou en polaire, il est utile de considérer la fonction angulaire associée φ qui est l'angle entre Ox et $\overrightarrow{T}$ d'où,

- en paramétriques, $\overrightarrow{T} : \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} / \frac{ds}{dt} \\ \frac{dy}{dt} / \frac{ds}{dt} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{N} : \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$
- en polaires, on a : $\varphi = \theta + V$

Théorème : Pour calculer la courbure ou le rayon de courbure, on utilise le plus souvent :

$$\gamma = \frac{d\varphi}{ds} \quad \text{ou bien} \quad R = \frac{ds}{d\varphi}$$

- En paramétriques, on peut parfois « reconnaître » directement la fonction $\varphi(t)$ à partir des expressions de $\overrightarrow{T}$.
  Si on ne reconnait pas cette fonction, on a : $\tan\varphi = \frac{y'}{x'}$,
  donc : $\left(1 + \tan^2\varphi\right)\frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{y'}{x'}\right)'$ permet d'avoir $\frac{d\varphi}{dt}$
  Alors, $R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{\frac{ds}{dt}}{\frac{d\varphi}{dt}}$ qui se calcule facilement.
- En polaires, $\varphi = \theta + V$ avec $\tan V = \frac{\rho}{\rho'}$, donc $\frac{d\varphi}{d\theta} = 1 + \frac{dV}{d\theta}$ se calcule facilement et :
  $R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{\frac{ds}{d\theta}}{\frac{d\varphi}{d\theta}}$

a/ Formules directes

On peut aussi rechercher, si on aime les calculs, des formules directes donnant courbure et rayon de courbure. Cela est parfois utile quand on cherche les éléments de courbure pour une valeur particulière du paramètre.

- En paramétriques : $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & f(t) = x(t) \\ y & = & g(t) = y(t) \end{array}\right.$
  - $\overrightarrow{T} : \dfrac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{N} : \dfrac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix}$
  - $R = \dfrac{\left(x'^2+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}}$
  - $\Omega : \left\{\begin{array}{l} X = x - y' \dfrac{x'^2+y'^2}{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}} \\ Y = y + x' \dfrac{x'^2+y'^2}{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}} \end{array}\right.$
- En cartésiennes : $y = f(x)$, on considère qu'on a une courbe paramétrée par $\left\{\begin{array}{l} x = x \\ y = f(x) \end{array}\right.$.
  Ceci évite d'avoir à mémoriser de nouvelles formules...
- En polaires : $\rho = \rho(\theta)$, $R = \dfrac{\left(\rho^2+\rho'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}$

b/ Pour la valeur 0 du paramètre

Un simple développement limité fournit, par la formule de Taylor :

- en paramétriques, appliqué à $x(t)$ et $y(t)$, les valeurs de $x'(0)$, $y'(0)$, $x''(0)$ et $y''(0)$ nécessaires au calcul de la courbure.
- en polaires, appliqué à $\rho(\theta)$ les valeurs de $\rho(0)$, $\rho'(0)$ et $\rho''(0)$ qui donnent aussi facilement la courbure.

42. Surfaces : Généralités

42.1. Surfaces, plan tangent

Une surface peut être définie par une équation cartésienne : $F(x,y,z) = 0$

ou sous forme de nappe paramètrée : $\left\{\begin{array}{l} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \\ z = h(u,v) \end{array}\right.$

On passe d'une représentation paramétrique à une représentation cartésienne en éliminant les 2 paramètres entre les 3 équations. On obtient l'équation d'une surface qui contient la nappe paramétrée. Pour savoir si on a ajouté des points, il faut chercher si pour un point de la surface on peut retrouver les valeurs des paramètres qui correspondent à ce point.

a/ Plan tangent à une surface définie en cartésiennes

Pour le plan tangent à (S) d'équation : $F(x,y,z) = 0$ en $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, on se place dans le cas où F est de classe $\mathscr{C}^1$ au moins.

Le vecteur $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix}$ est normal à la surface (repère orthonormal), si ce vecteur est non nul, le plan

tangent est donc d'équation : $(X-x_0)\dfrac{\partial F}{\partial x}+(Y-y_0)\dfrac{\partial F}{\partial y}+(Z-z_0)\dfrac{\partial F}{\partial z}=0.$

b/ Plan tangent à une nappe paramétrée

Pour le plan tangent à la nappe paramètrée : $\begin{cases} x=f(u,v)\\ y=g(u,v)\\ z=h(u,v)\end{cases}$ en $\begin{pmatrix} x_0\\ y_0\\ z_0\end{pmatrix}$ correspondant à (u_0,v_0), on se place dans le cas où f,g,h sont de classe $\mathscr{C}^1$ au moins.

S'ils forment une famille libre, les vecteurs : $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0)\\ \dfrac{\partial g}{\partial u}(u_0,v_0)\\ \dfrac{\partial h}{\partial u}(u_0,v_0)\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0)\\ \dfrac{\partial g}{\partial v}(u_0,v_0)\\ \dfrac{\partial h}{\partial v}(u_0,v_0)\end{pmatrix}$ définissent la direction du plan tangent.

Le plan tangent est donc alors normal au produit vectoriel : $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u}\\ \dfrac{\partial g}{\partial u}\\ \dfrac{\partial h}{\partial u}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial v}\\ \dfrac{\partial g}{\partial v}\\ \dfrac{\partial h}{\partial v}\end{pmatrix}$.

Si ce produit vectoriel n'est pas nul, le plan tangent est donc d'équation : $\begin{vmatrix} (X-x_0) & \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v}\\ (Y-y_0) & \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v}\\ (Z-z_0) & \dfrac{\partial h}{\partial u} & \dfrac{\partial h}{\partial v}\end{vmatrix}=0$

Le plan tangent à une surface est visualisé figure 26, ci-dessous.

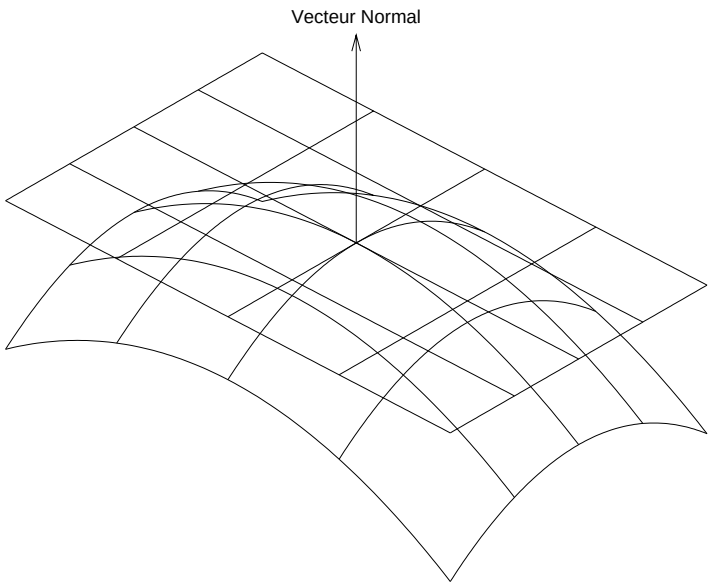


Figure 26 – **Plan tangent**

42.2. Tangente à une courbe de l'espace

Une courbe de l'espace peut être définie par une intersection de surfaces : $\begin{cases} F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$

ou sous forme de représentation paramètrique : $\begin{cases} x = f(u) \\ y = g(u) \\ z = h(u) \end{cases}$

- Dans le cas d'une intersection de surfaces, l'intersection des plans tangents, si elle est une droite, est la tangente à la courbe au point considéré.
- Dans le cas d'une représentation paramétrique, le vecteur $\begin{pmatrix} f'(u_0) \\ g'(u_0) \\ h'(u_0) \end{pmatrix}$, s'il est non nul, dirige la tangente qui est donc de représentation paramétrique $\begin{cases} X = x_0 + \lambda f'(u_0) \\ Y = y_0 + \lambda g'(u_0) \\ Z = z_0 + \lambda h'(u_0) \end{cases}$

43. Cercles et Sphères

On travaille toujours dans un repère orthonormal.

43.1. Cercles dans le plan et sphères

a/ Cercles dans le plan

- Le cercle de centre Ω : $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et de rayon R est d'équation : $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$
- Le cercle de diamètre AB est d'équation : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

b/ Sphères dans l'espace

- La sphère de centre Ω : $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ et de rayon R est d'équation : $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$
- La sphère de diamètre AB est d'équation : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

43.2. Cocyclicité

Théorème : (Angle au centre)
A,B et C distincts appartiennent à un même cercle de centre $\Omega \Leftrightarrow \left|\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}}\right)\right| = 2\left|\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)\right|$

Théorème : A,B,C et D distincts sont cocycliques ou alignés $\Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}}\right) =_{[\pi]} \left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BD}}\right)$

Théorème : Si a,b,c,d sont les affixes de A,B,C,D distincts dans le plan complexe, A,B,C et D appartiennent à un même cercle ou sont alignés $\Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right) =_{[\pi]} \arg\left(\dfrac{d-b}{d-a}\right)$

43.3. Cercles dans l'espace.

Le plus souvent, un cercle dans l'espace est donné par l'intersection d'une sphère et d'un plan.
Cette intersection est un cercle, un point ou vide selon la distance du centre de la sphère au plan.
On appelle **axe du cercle** la droite perpendiculaire au plan passant par le centre de la sphère.

> L'intersection de deux sphères, selon la distance des centres par rapport à la somme des rayons, est aussi un cerle, un point ou vide.

44. Coniques

Une conique, éventuellement dégénérée, est une courbe plane ayant pour équation cartésienne $P(x,y) = 0$ avec $P(x,y)$ un polynôme du second degré.

44.1. Ellipses

a/ Equation réduite centrée

C'est : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

- a et b, avec $a > b > 0$, sont les longueurs des demi-grand axe et demi-petit axe.
  Les foyers sont alors sur Ox.
- $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, est la distance du centre aux foyers.
- $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{MF}{MH} < 1$, est l'excentricité.
- $\dfrac{a^2}{c}$ est la distance du foyer F à la directrice (D).
- Le paramètre p de l'ellipse, qui intervient en coodonnées polaires est : $p = \dfrac{b^2}{a} = e\,d$, où d est la distance du foyer à la directrice correspondante.

Les éléments de l'ellipse sont précisés figure 27, ci-dessous.

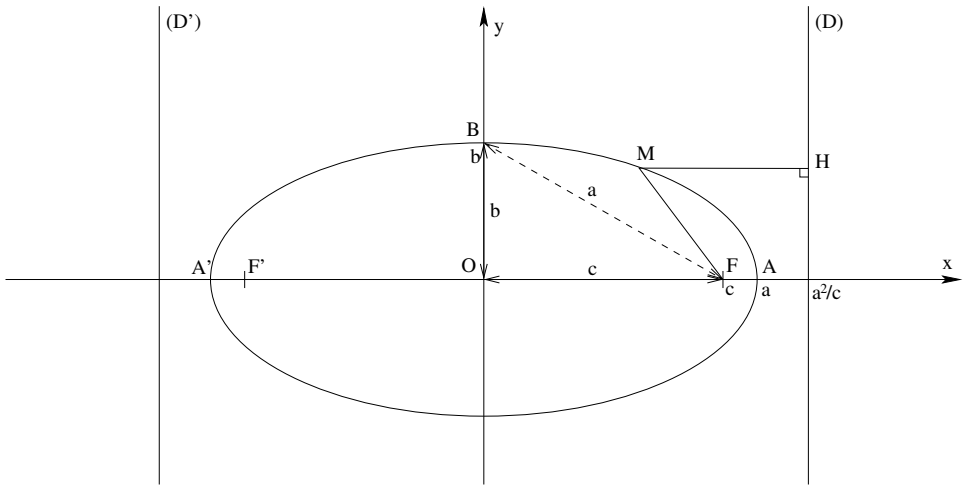


Figure 27 – **Ellipse : foyers et directrices**

b/ Equation par foyer F et directrice D

C'est : $\dfrac{MF}{MH} = e$, avec $e < 1$

c/ Détermination bifocale

Théorème : L'ensemble des points M du plan vérifiant : $MF + MF' = 2a$, avec F et F' deux point et a une longueur est une ellipse de foyers F et F', et de demi grand axe de longueur a.

d/ Equation en coordonnées polaires

On a : $\rho = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$, un des foyers F étant à l'origine

- p est le paramètre de l'ellipse, e est l'excentricité

- l'axe focal est Ox
- On trouve les autres paramètres en écrivant $\rho(0)+\rho(\pi)=2a$ qui donne $a=\dfrac{p}{1-e^2}$

44.2. Paraboles

a/ Equation réduite

C'est : $y^2=2\,p\,x$, avec $p>0$, le paramètre

- p est le paramètre de la parabole.
- O est le sommet et Ox l'axe de symétrie.
- L'excentricité $e=\dfrac{MF}{MH}$ vaut 1 et l'unique foyer F est à la distance $\dfrac{p}{2}$ du sommet sur l'axe de symétrie.
- La directrice (D) est aussi à la distance $\dfrac{p}{2}$ du sommet, perpendiculaire à l'axe de symétrie.

Les éléments de la parabole sont précisés figure 28, ci-dessous.

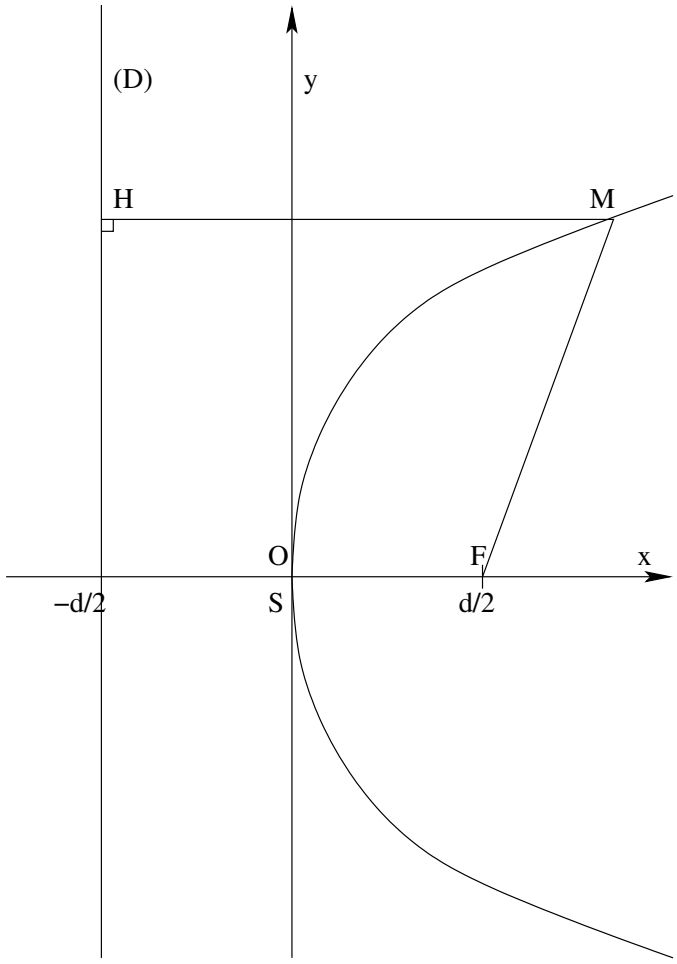


Figure 28 – **Parabole : foyers et directrices**

b/ Equation par foyer F et directrice D

C'est : $\dfrac{MF}{MH}=e=1$, la distance du foyer à la directrice est p.

c/ Equation en coordonnées polaires

On a : $\rho = \dfrac{p}{1+\cos\theta}$, le foyer F étant à l'origine.

- p est le paramètre de la parabole, distance du foyer à la directrice,
- l'axe de symétrie est Ox et contient le foyer.

44.3. Hyperboles

a/ Equation réduite centrée

C'est : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

- Les foyers sont alors sur Ox.
- $c = \sqrt{a^2+b^2}$, est la distance du centre aux foyers.
- $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{MF}{MH} > 1$, est l'excentricité.
- Les asymptotes sont d'équation : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right)\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = 0.$
  On les trouve en annulant le second membre dans l'équation réduite.
- La directrice (D) est à la distance $\dfrac{a^2}{c}$ du centre, perpendiculaire à l'axe focal.
- Le paramètre p de l'hyperbole, qui intervient en coodonnées polaires est : $p = \dfrac{b^2}{a} = e\,d$, où d est la distance du foyer à la directrice correspondante.

b/ Equation par foyer F et directrice D

C'est : $\dfrac{MF}{MH} = e$, avec $e > 1$.
Les éléments de l'hyperbole sont précisés figure 29, page suivante.

c/ Détermination bifocale

Théorème : L'ensemble des points M du plan vérifiant : $|MF - MF'| = k$, avec F et F' deux point et k une constante est une hyperbole de foyers F et F'.

d/ Equation en coordonnées polaires

C'est : $\rho = \dfrac{p}{1+e\cos\theta}$ un des foyers F étant à l'origine

- p est le paramètre de l'hyperbole, e est l'excentricité
- l'axe focal est Ox

44.4. Identification d'une conique

On part d'un polynôme non nul du second degré en x et y

- cas où il n'y a pas de termes en xy
  - avaler, si possible, les termes en x et en y dans des carrés : $x^2 + ax = \left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 - \dfrac{a^2}{4}$
    Cela revient à faire une translation de l'origine du repère.
  - se ramener ensuite à une des formes canoniques décrites.
    - On trouve des paraboles, hyperboles et ellipses (ou cercles)
    - mais aussi des coniques dégénérées : couple de droites, droite, point, vide.
- cas où il y a des termes en xy
  - on repère la forme quadratique formée des seuls termes du second degré : $ax^2 + 2bxy + cy^2$

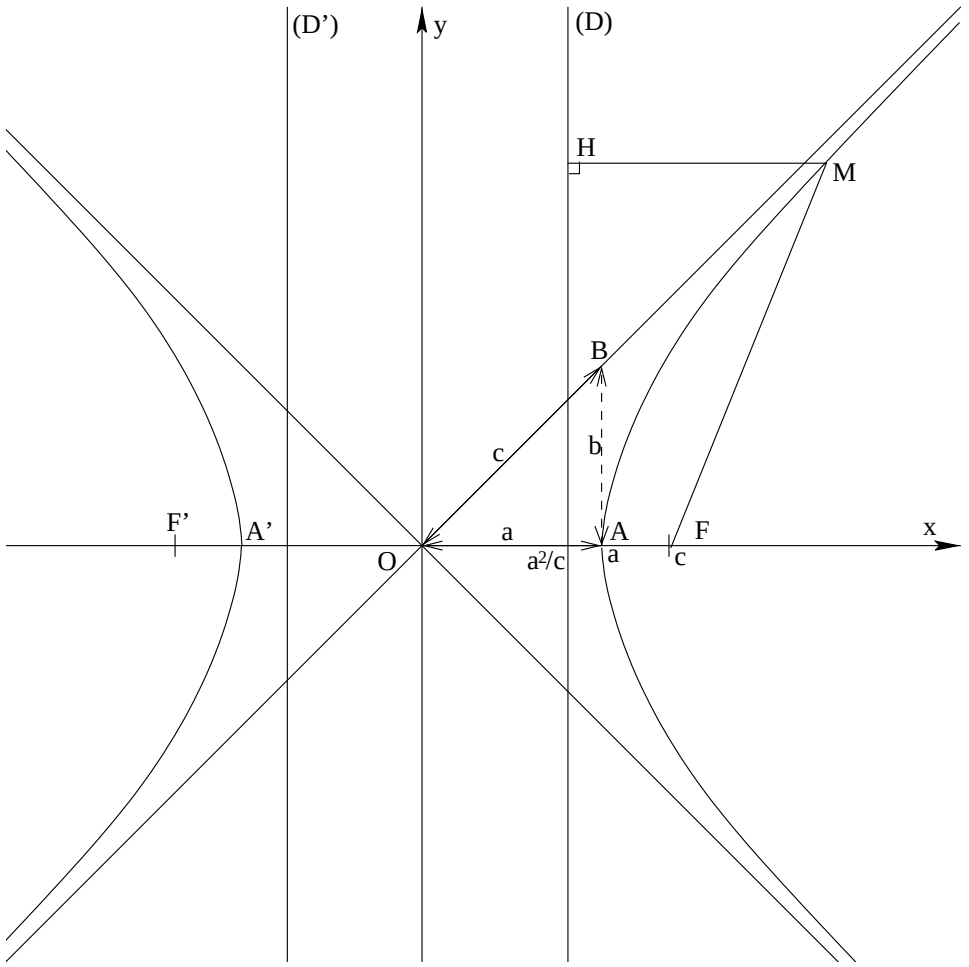


Figure 29 – **Hyperbole : foyers et directrices**

on considère sa matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ qu'on diagonalise dans une base orthonormale directe de vecteurs propres, avec P la matrice de passage et λ et μ les deux valeurs propres.
Cela revient à faire une rotation du repère.

- alors $ax^2 + 2bxy + cy^2 = \lambda X^2 + \mu Y^2$ avec $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ qui nous sert aussi à transformer le reste de l'équation de la conique.
- il n'y a donc plus de termes en xy dans ce repère. On est ramené au cas précédent.

44.5. Projection d'une conique sur un plan

La projection d'une conique sur un plan est, en général une conique de même type.

- Une parabole se projette selon une parabole, ou une droite ou une demi-droite ;
- Une ellipse se projette selon une ellipse ou un segment de droite ;
- Une hyperbole se projette selon une hyperbole ou une droite ou de 2 demi-droites de la même droite.

Réciproquement, si la projection d'une **courbe plane** est une conique **propre**, alors cette courbe est une conique propre de même type.

45. Quadriques

Une quadrique, éventuellement dégénérée, est une surface ayant pour équation cartésienne $P(x,y,z)=0$ avec $P(x,y,z)$ un polynôme du second degré.

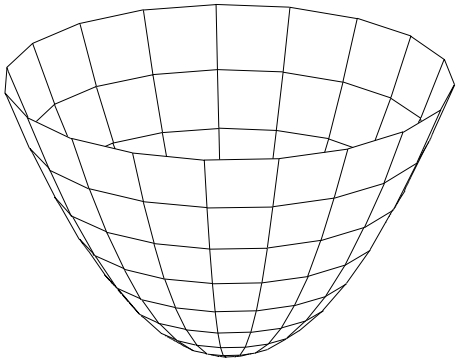
45.1. Equations réduites

- **Ellipsoïde (E) :** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{avec} \quad a>0 \quad b>0 \quad c>0$
  Si $a=b$, il est de révolution d'axe Oz
  Il ne contient pas de droites.
- **Paraboloïde elliptique (PE) :** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2pz \quad \text{avec} \quad a>0 \quad b>0$
  Si $a=b$, il est de révolution d'axe Oz
  Il ne contient pas de droites.
- **Paraboloïde hyperbolique (PH) :** $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2pz \quad \text{avec} \quad a>0 \quad b>0$
  Il n'est jamais de révolution, mais contient deux familles de droites obtenues en factorisant
  $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$, ce qui donne : $\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=k\\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{2pz}{k}\end{cases}$ et : $\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=k\\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=\dfrac{2pz}{k}\end{cases}$ avec k non nul.
  Par tout point, il passe deux droites distinctes tracées sur la surface, incluses également dans le plan tangent à ce point.
- **Hyperboloïde à 1 nappe (H1) :** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{avec} \quad a>0 \quad b>0 \quad c>0$
  Si $a=b$, il est de révolution d'axe Oz
  Le cône asymptote est d'équation : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$
  Il contient deux familles de droites obtenues en factorisant : $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}$, et $1-\dfrac{y^2}{b^2}$
  ce qui donne : $\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=k\left(1-\dfrac{y}{b}\right)\\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{k}\left(1+\dfrac{y}{b}\right)\end{cases}$ et : $\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=k\left(1-\dfrac{y}{b}\right)\\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{k}\left(1+\dfrac{y}{b}\right)\end{cases}$ avec k non nul.
  Par tout point, il passe deux droites distinctes tracées sur la surface, incluses également dans le plan tangent à ce point.
- **Hyperboloïde à 2 nappes (H2) :** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1 \quad \text{avec} \quad a>0 \quad b>0 \quad c>0$
  Si $a=b$, il est de révolution d'axe Oz
  Le cône asymptote est d'équation : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$
  H2 ne contient pas de droites.

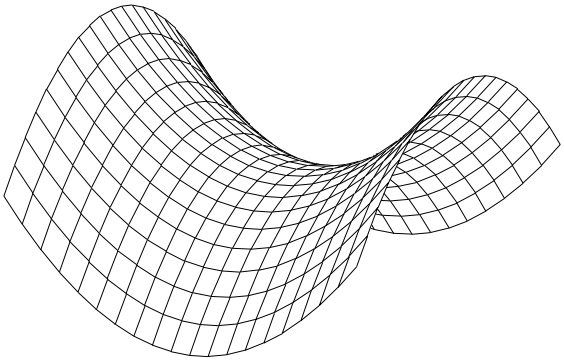
Sur la figure 30, page suivante, on a représenté les cinq quadriques propres.

45.2. Intersection avec un plan

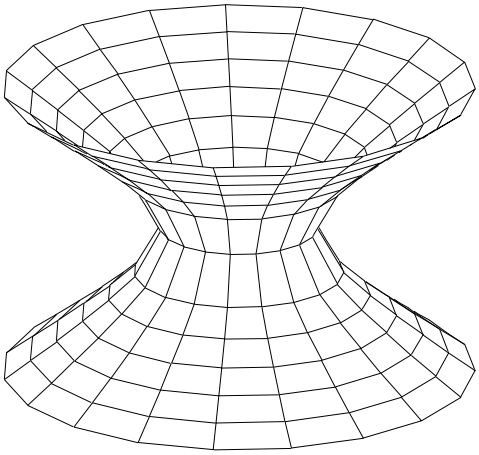
	E	PE	PH	H1	H2
Ellipse	×	×		×	×
Parabole		×	×	×	×
Hyperbole			×	×	×
Deux droites			×	×	
Point	×	×			×
Vide	×	×			×



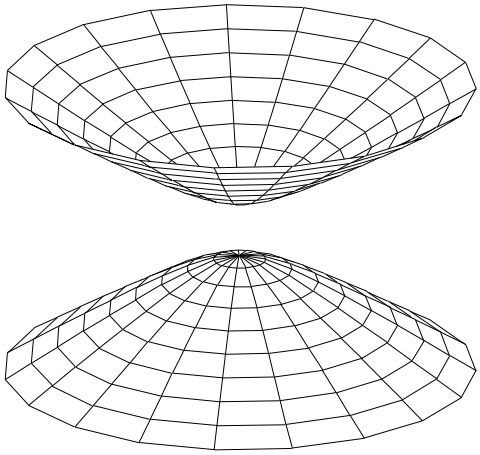
Paraboloïde Elliptique



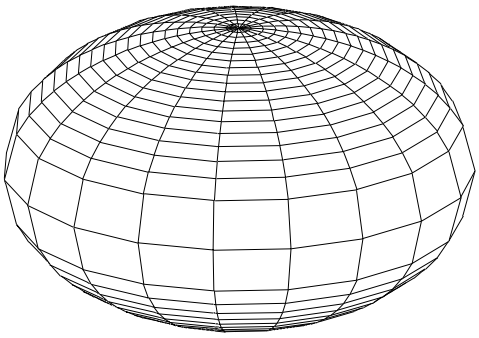
Paraboloïde Hyperbolique



Hyperboloïde à une nappe



Hyperboloïde à 2 nappes



Ellipsoïde

Figure 30 – **Quadriques**

45.3. Identification d'une quadrique

On part d'un polynôme du second degré en x, y et z.

- cas où il n'y a de termes ni en xy, ni en xz, ni en yz,
  - avaler si possible les termes en x, y et en z dans des carrés : $x^2+ax=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$
    Cela revient à faire une translation de l'origine du repère.
  - se ramener ensuite à une des formes canoniques décrites.
    - ◇ On trouve des paraboloïdes elliptiques et hyperboliques, hyperboloïdes à 1 ou 2 nappes et ellipsoïdes (ou sphères)
    - ◇ mais aussi des quadriques dégénérées: cylindres, cônes, ..., point, vide
- cas où il y a des termes en xy, xz ou yz,
  - la forme quadratique est formée des termes du second degré : $ax^2+2bxy+2cxz+dy^2+2eyz+fz^2$,
    on considère sa matrice : $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$, qu'on diagonalise dans une base orthonormale de vecteurs propres, avec P la matrice de passage et λ, μ et ν, les trois valeurs propres.
    Si on a pris une base orthonormale directe, cela revient à faire une rotation du repère.
  - alors : $ax^2+2bxy+2cxz+dy^2+2eyz+fz^2=\lambda X^2+\mu Y^2+\nu Z^2$, avec $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$, qui nous sert aussi à transformer le reste de l'équation de la quadrique.
  - il n'y a donc plus de termes en xy, xz ou yz dans ce repère. On est ramené au cas précédent.

46. Surfaces de révolution, cylindres et cônes

46.1. Surfaces de révolution

Définition : Une **surface de révolution d'axe** Δ est formée d'une famille de cercles d'axe Δ
Un plan contenant l'axe de révolution est un **plan méridien**,
son intersection avec la surface est une **méridienne.**

La méridienne est symétrique par rapport à l'axe de révolution. On parle parfois de demi-méridienne.

Théorème : Une surface de révolution a une équation de la forme : $F(S,P)=0$,
avec : $S(x,y,z)=R^2$, l'équation d'une sphère et $P(x,y,z)=k$, l'équation d'un plan.
L'axe de révolution est orthogonal à P passant par le centre de S.

Corollaire :
Dans le cas où l'axe est Oz la surface de révolution a une équation de la forme : $F(x^2+y^2,z)=0$

a/ Surface de révolution Σ engendrée par la rotation de Γ autour de Δ

- faire une figure symbolique (figure 31, page suivante)
- partir d'un point **quelconque** de la surface Σ cherchée : $M:\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$
- écrire qu'un point de Γ appartient à la fois
  - à la sphère centrée sur un point arbitraire de Δ (choisi le plus simple possible) passant par M
  - au plan perpendiculaire à Δ passant par M
- éliminer les paramètres, on obtient l'équation d'une surface Σ' de révolution qui contient Σ la surface cherchée.

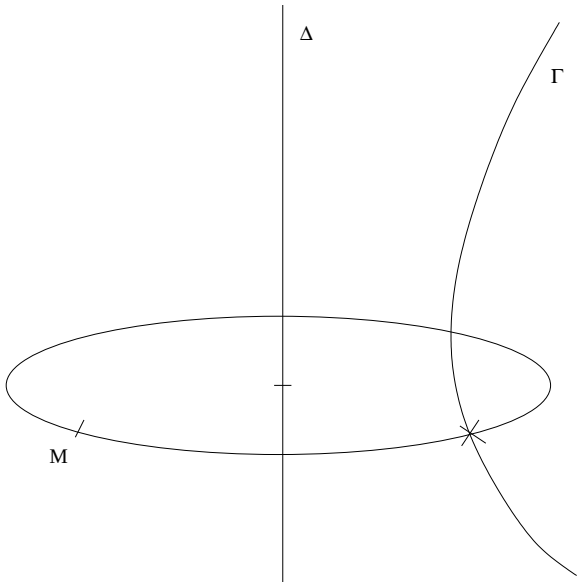


Figure 31 – **Surface de révolution : axe et directrice**

Si Γ est donnée en paramètrique, un point de Γ correspond à une valeur du paramètre,

tandis que si Γ est donnée par intersection de surfaces, un point de Γ est repéré par : $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

b/ Surface de révolution Σ d'axe Oz et de demi-méridienne $f(x,z) = 0$

- On reconstitue la méridienne complète $f(x,z) \times f(-x,z) = F\left(x^2,z\right) = 0$
- La surface est d'équation $F\left(x^2+y^2,z\right) = 0$

46.2. Cylindres

Définition : Un **cylindre de direction** $\overrightarrow{u}$ est formée d'une famille de droites de direction $\overrightarrow{u}$
Ces droites sont les **génératrices.** Une courbe qui rencontre toutes les génératrices est une **directrice**.
L'intersection de la surface avec un plan orthogonal à la direction $\overrightarrow{u}$, est une **section droite** du cylindre.

Un cylindre n'est, en général, pas un cylindre de révolution!

Théorème : Un cylindre de direction $\overrightarrow{u}$ a une équation de la forme : $F(P_1,P_2) = 0$,
avec : $P_1(x,y,z) = k_1$, et $P_2(x,y,z) = k_2$, l'équation de deux plans.
De plus, $P_1 \cap P_2$ donne la direction $\overrightarrow{u}$ du cylindre.

Corollaire : Dans le cas où la direction est $\overrightarrow{k}$ le cylindre a une équation de la forme : $F(x,y) = 0$.

a/ Cylindre de direction et de directrice donnés

On cherche le cylindre Σ de direction $\overrightarrow{u}$ et de directrice Γ

- faire une figure symbolique (figure 32, page suivante)
- partir d'un point **quelconque** de la surface Σ cherchée : $M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$

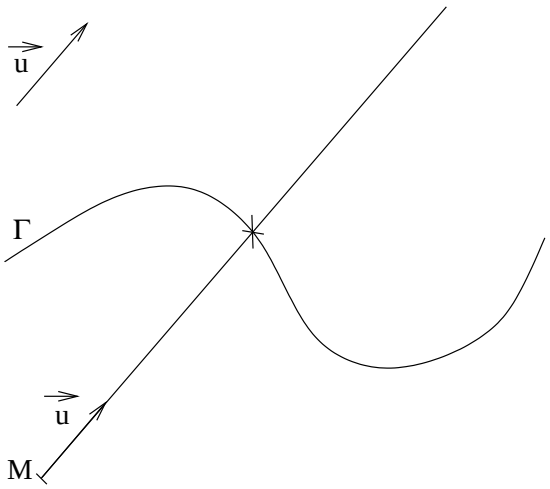


Figure 32 – **Cylindre : direction et directrice**

- écrire que la droite (décrite en paramétrique) $\left(M,\overrightarrow{u}\right)$ rencontre Γ
- éliminer les paramètres, on obtient l'équation d'un cylindre Σ' qui contient Σ le cylindre cherché.

b/ Contour apparent

Pour le contour apparent de $\mathscr{S}$, on écrit que le gradient de $\mathscr{S}$ en un point est normal à la direction du cylindre.

On note : $\overrightarrow{u} : \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

On obtient le contour apparent par intersection de surfaces :

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= 0 \\ \alpha\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) + \beta\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) + \gamma\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) &= 0 \end{aligned}$$

> On n'hésitera pas à simplifier au maximum ces équations dès que possible.

La figure 33, page suivante, illustre cette recherche.

> Si le cylindre est circonscrit à une surface, on cherche le contour apparent, puis on cherche le cylindre de la direction donnée et de directrice ce contour apparent.

46.3. Cônes

Définition : Une **cône de sommet** Ω est formée d'une famille de droites passant par Ω
Ces droites sont les **génératrices.** Une courbe qui rencontre toutes les génératrices est une **directrice**.

> Un cône n'est, en général, pas un cône de révolution!

Théorème : Une surface d'équation cartésienne un polynôme en x,y,z est un cône de sommet O si et seulement si tous les monômes sont de même degré (degré cumulé en x,y,z).

a/ Cône Σ de sommet Ω et de directrice Γ

- faire une figure symbolique (figure 34, page suivante)

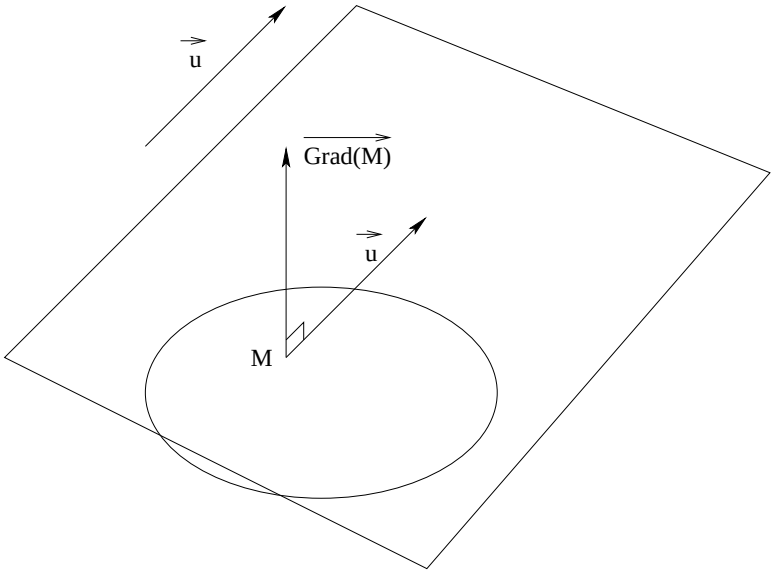


Figure 33 – ***Le plan tangent à $\mathscr{S}$ en M contient la direction $\overrightarrow{u}$***

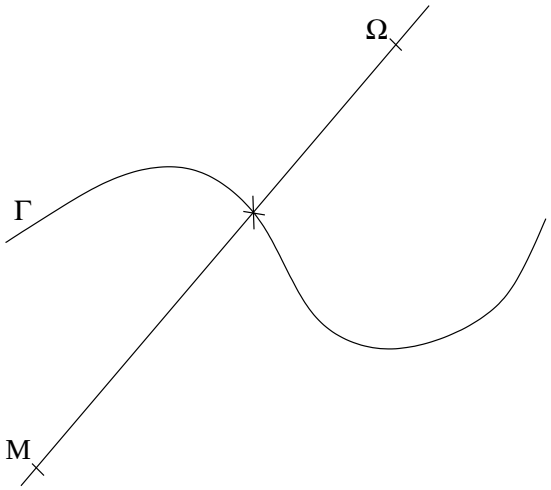


Figure 34 – **Cône : sommet et directrice**

- partir d'un point **quelconque** de la surface Σ cherchée M : $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$
- écrire que la droite (décrite en paramétrique) (ΩM) rencontre Γ
- éliminer les paramètres, on obtient l'équation d'un cône Σ' qui contient Σ le cône cherché.

b/ Contour apparent

Pour le contour apparent de $\mathscr{S}$ vu du point Ω, on écrit que le gradient de $\mathscr{S}$ en un de ses points P est normal au vecteur $\overrightarrow{\Omega P}$.

On note : $\Omega : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

On obtient le contour apparent par intersection de surfaces :

$$F(x,y,z) = 0$$
$$(x-a)\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) + (y-b)\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) + (z-c)\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 0$$

> On n'hésitera pas à simplifier au maximum ces équations dès que possible.

La figure 35, ci-dessous, illustre cette recherche.

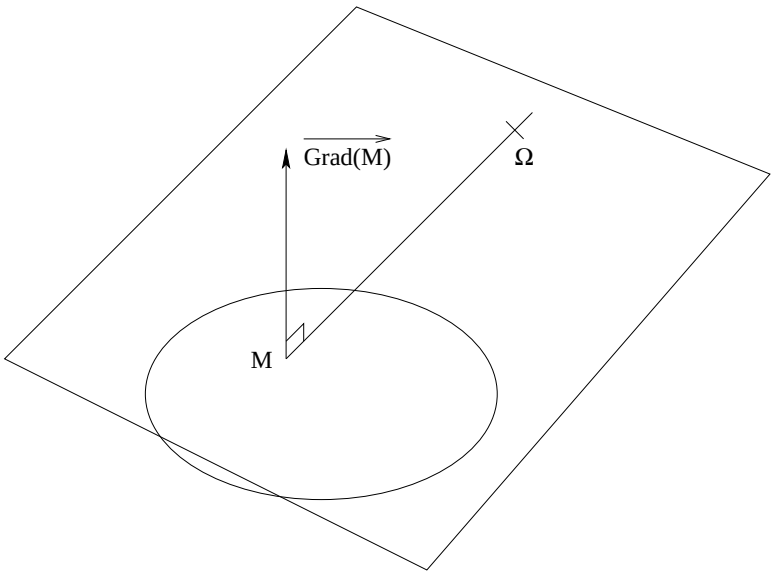


Figure 35 – ***Le plan tangent à $\mathscr{S}$ en M contient Ω***

> Pour le cône circonscrit, on cherche d'abord le contour apparent puis le cône de sommet donné et de directrice ce contour apparent.

46.4. Cylindres et cônes de révolution

> On ne cherche pas l'équation d'un cylindre ou d'un cône de révolution comme celle d'un cylindre ou d'un cône ni comme celle d'une surface de révolution!...

a/ Cylindre de révolution

Pour un cylindre de révolution défini par son axe $D : (A, \overrightarrow{u})$ et son rayon R
On cherche l'ensemble des points M tels que la distance de M à D vaut R. (Voir Page 70)
On élève tout au carré pour enlever les valeurs absolues.

b/ Cône de révolution

Pour un cône de révolution défini par son axe D dirigé par $\overrightarrow{u}$, son sommet Ω et son demi angle au sommet θ
On cherche l'ensemble des points M tels que l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\Omega M}\right)$ a pour mesure θ. (Voir Page 69)
On élève tout au carré pour enlever les valeurs absolues.

Quatrième partie

Maple

On présentera cet aide-mémoire sous forme de tableaux à trois colonnes : les mots-clefs, une description rapide de leur fonction et enfin, un exemple d'utilisation.
Rappelons qu'une erreur en Maple est le plus souvent à chercher **avant** l'endoit où Maple la détecte.

47. Bases

47.1. Manipulations de base

> On ne confondra pas une **expression** et une **fonction**.
> Par exemple : `sin(t)` est une expression de `t`, tandis que la fonction est : `sin`.

; *ou* :	Exécution d'une commande avec ou sans affichage du résultat.	> 12*13;
+ - * /	Somme, différence, produit ou quotient d'expressions.	> (x+2)/t;
** *ou* ^	Exponentielle.	> 12**13;
&*	Produit de matrices ou vecteurs. Sans le &, Maple considère tous les produits comme commutatifs... De plus l'usage de `evalm` est indispensable pour avoir un affichage effectif des lignes et colonnes.	> evalm(P*(-1)&*A&*P);
iquo irem	Quotient et reste de la division des entiers.	> iquo(1732,13);
quo rem	Quotient et reste de la division euclidienne des polynomes (il faut préciser la variable).	> r:=rem(x^5,x^2+1,x);
!	Factorielle.	> 123!;
binomial	Coefficients binomiaux comme C_n^2	> binomial(2,n);
= < > <> <= >=	Opérateurs de comparaison, souvent utilisés dans un **si ... alors ... sinon**, ou dans une résolution d'équation ou inéquation.	> solve(x^2>1,x);
and or not	Opérateurs logiques, souvent utilisés dans un **si ... alors ... sinon**.	> evalb(a=1 or b=0);
@	Composée de fonctions (qui ne sont pas des expressions ...).	> f2:=f@f;
:=	Affectation, permet de donner une valeur à une variable.	> a:=(x+1)/(x-1);
'*variable*'	Permet de libérer, désaffecter une variable.	> a:='a';
->	Définition rapide d'une fonction (qui n'est toujours pas une expression).	> f:=->x^2-1;f(2);
"	Variable valant le dernier résultat calculé.	> p:=(x+1)/x; > "**2;

47.2. Constantes

Pi I infinity	Nombres π, i, et $+\infty$, on fera attention aux majuscules !	> Pi,pi; > evalf(Pi),evalf(pi);

47.3. Sommes et produits

sum product	Calcul de toute somme ou produit indicés. On conseille d'utiliser des apostrophes.	> sum('1/(n^2)','n'=1..7); > sum('p','n'=0..infinity);

47.4. Fonctions d'évaluation

Les fonctions d'évaluation sont nombreuses et importantes, elles forcent Maple à effectuer une évaluation de la quantité afin de ne pas rester en calcul formel...
Ceci est très important car l'éxécution d'une procédure ou d'un calcul n'est **pas du tout** la même selon que l'on travaille en calcul approché « flottant » ou en calcul formel « exact » . Quand on veut au final du calcul approché, il faut se mettre en calcul approché le plus tôt possible...

eval	Evaluation générale d'une expression. Cette instruction est surtout utilisée dans le corps des procédures pour forcer l'évaluation complète d'une expression.	> eval(Pi*3.14);
evalb	Evaluation d'une expression logique (booléenne), c'est une quantité vraie ou fausse, souvent utilisée dans un si... alors... sinon.	> evalb(x>=1);
evalf	Valeur approchée d'une expression, le nombre de chiffres significatifs est dans la variable Digits. Indispensable quand on ne veut pas que Maple reste inutilement en théorique.	> Digits:=50; > evalf(Pi/2);
evalc	Evaluation d'un complexe en partie réelle et partie imaginaire. Attention Maple considère a priori les variables libres comme complexes...	> evalc((2*I)^3);
evalm	Force l'évaluation d'un vecteur ou d'une matrice en ligne et colonnes, ce que Maple ne fait pas de lui même.	> evalm(A&*B);

47.5. Transformation générale d'expressions

subs	Subsitue dans l'expression « p » , l'expression « y » à la variable « x » .	> subs(x=y,p);
collect	Regroupe les termes d'une même puissance d'une expression par rapport à une variable.	> collect(p,x);
sort	Trie selon les puissances décroissantes une expression selon une variable.	> sort(p,x);
expand	Développe une expression polynomiale, trigonométrique, exponentielle ou logarithmique.	> expand((x-a)**7); > expand(sin(2*x)); > expand(ln((x+1)/(x-1))); > expand(exp(x+2*y));
combine *options :* trig exp ln power	Presque la fonction réciproque de expand. Regroupe les termes selon l'option choisie (linéarise avec trig...).	> combine(sin(x)^7,trig);
factor	Factorise une expression. Il faut souvent ajouter les éléments utilisés dans la factorisation, qu'on peut chercher avec solve.	> factor(x**2-2); > factor(x**2-2,sqrt(2)); > factor(x**2+2,sqrt(2)); > factor(x**2+2,{sqrt(2),I});
convert *options :* parfrac tan	Convert possède de nombreuses options pour transformer une expression, en particulier trigonométrique. Avec l'option parfrac, il décompose en « éléments simples » une fraction rationnelle. Il vaut mieux auparavent factoriser complètement le dénominateur.	> convert(p,tan); > convert(p,parfrac,x);

47.6. Simplification d'expressions

normal	Simplifie (un peu) les fractions rationnelles. Comme pour « convert » , on a intérèt à factoriser le dénominateur avant la demande de simplification.	> p:=(x^2-1)/(x^2+2*x+1); > normal(p);
simplify	Essaye de simplier une expression, possède de nombreuses options... mais peut également s'utiliser sans option.	> simplify(p);

47.7. Structures de données

a..b	Intervalle de a à b. Utilisé dans les tracés de courbes et les intégrales par exemple.	> int(sin(t),t=0..Pi); > plot(sin(t),t=0..Pi);
{a,b,c} union intersect	Ensemble formé de a, b et c, et opérateurs d'union et d'intersection d'ensembles. Utilisé par exemple pour tracer plusieurs courbes sur un même graphe.	> E:=E union {a,b } > plot({sin(t),cos(t)},t=0..Pi);
[a,b,c]	Liste formée de a, b et c. Utilisé par exemple pour tracer des courbes en paramétriques.	> plot([sin(t),cos(t),t=0..Pi], x=-2..2,y=-2..2);

48. Mathématiques usuelles

48.1. Fonctions mathématiques usuelles

Signalons que Maple possède de très nombreuses fonctions « usuelles » qui apparaissent lors d'une résolution d'équation, d'un calcul de primitive...

exp ln	Exponentielle et logarithmes. Maple les définit sur $\mathbb{C}$, comme la plupart des fonctions.	> exp(1); > ln(1+I);
sin cos tan	Sinus, cosinus et tangente.	> sin(Pi/2);
sinh cosh tanh	Sinus, cosinus et tangente hyperboliques.	> sinh(1);
arcsin arccos arctan	Arcsinus, arccosinus et arctangente.	> arctan(1);
abs	Valeur absolue ou module, selon qu'on est sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$.	> abs(3+4*I); > abs(-Pi);
Re Im	Partie réelle et imaginaire d'un complexe. Attention, pour Maple, a priori, une variable libre est complexe.	> Re(a+b*I);
conjugate	Conjugué d'un complexe.	> conjugate(1+I);
argument	Argument d'un nombre complexe.	> argument(1+I);

48.2. Limites et développements limités

limit	Calcul de limites d'une expression.	> limit(p,x=1); > limit(p,x=-infinity);
series	Calcul du développement limité ou asymptotique d'une expression ; il faut préciser le point et l'ordre désiré...	> p:=series(p,x=1,5);
leadterm	Calcul du premier terme a priori non nul d'un développement limité. Quand il n'est pas nul, c'est un équivalent.	> series(leadterm(p),x=0,8);

48.3. Dérivées

diff	Dérivée d'une expression par rapport à la ou les variables spécifiées.	> diff(sin(x),x); > diff(sin(x),x,x);
D	Dérivée d'une fonction.	> D(sin);

48.4. Primitives et intégrales

int	Calcul d'une primitive (Maple n'introduit pas de constante), ou d'une intégrale, simple ou généralisée, d'une expression.	> int(p,x); > int(p,x=0..infinity);
Int	Forme « inerte » de la précédente. Pas de calcul.	> Int(p,x);
changevar *et* intparts *du package* student	Effectue un changement de variable ou une intégration par parties (indiquer la partie qu'on dérive) sur une intégrale inerte. Maple ne cherche donc pas à effectuer le calcul.	> changevar(t^2=u,Int(t/(t^ 2+1)),t); > intparts(Int(x^3*sin(x),x),x^3);

48.5. Résolution d'équations ou de systèmes d'équations

solve	Résolution de tous types d'équations et inéquations par rapport à une variable spécifiée. Mais, Maple ne donne pas nécessairement toutes les solutions...	> solve(a*x^2+2*a*x+1,x); > solve(a*x^2+2*a*x+1,a); > solve((sin(t)=cos(2*t),t);
fsolve	Résolution approchée de tous types d'équations, avec les mêmes réserves que ci-dessus.	> fsolve(a*x^2+2*a*x+1,a); > fsolve((sin(t)=cos(2*t),t);
dsolve *option* numeric	Résolution de tous types d'équations différentielles et de systèmes différentiels, avec ou sans conditions initiales. L'option numeric donne une résolution numérique approchée de l'équation ou du système, toujours posé avec des conditions initales.	> E:=diff(y(x),x)+y(x)=cos(x)); > dsolve(E,y(x)); > dsolve({E,y(0)=0},y(x)); > dsolve({E,y(0)=0},y(x), numeric);
rsolve	Résolution de suites récurrentes linéaires.	> rsolve(u(n)=3*u(n-1)-2*u(n-2),u);
linsolve	Résolution de systèmes linéaires présentés matriciellement, les paramètres sont la matrice du système et le vecteur second membre.	> linsolve(A,B);

49. Algèbre linéaire

Le package « linalg » doit être chargé auparavant : > with(linalg);

49.1. Vecteurs

Maple utilise des vecteurs qui sont mathématiquement des vecteurs **colonne**, mais qu'il **écrit en ligne** pour des questions de lisibilité sur l'écran !...

vector	Définition d'un vecteur colonne. U[2] désigne la deuxième coordonnée de U.	> U:=vector([1,4,9]); > U:=vector(3,i-> i*i);
dotprod	Produit scalaire de 2 vecteurs.	> dotprod(U,V);
crossprod	Produit vectoriel de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^3$.	> crossprod(U,V);
norm(···,2)	Norme Euclidienne d'un vecteur.	> norm(U,2);

49.2. Procédé de Schmidt

GramSchmidt *option* normalized	Applique le procédé de Schmidt à une liste de vecteurs et renvoie une famille orthogonale de vecteurs engendrant le même sous-espace. L'option normalized permet d'avoir des vecteurs normés.	> GramSchmidt([U,V]); > GramSchmidt([U,V], normalized);

49.3. Matrices

matrix	Définition d'une matrice (par lignes). A[2,3] est l'élément deuxième ligne, troisième colonne.	> A:=matrix([[1,2],[3,4]]); > B:=matrix(2,2,(i,j)->2*i+j);
transpose	Transpose une matrice ou un vecteur.	> transpose(A); > evalm(transpose(A));
inverse	Inverse une matrice carrée inversible.	> evalm(inverse(A)&*A);
rank	Rang d'une matrice (pour la valeur générale des paramètres...).	> r:=rank(A);
det trace	Déterminant et trace d'une matrice carrée.	> Δ:=det(A); > trace(A &* B) - trace(B &* A)

49.4. Eléments propres

charmat	Matrice caractéristique : $(A - \lambda I_n)$.	> U:=charmat(A,lambda);
charpoly	Polynôme caractéristique : $\det(A - \lambda I_n)$.	> P:=charpoly(A,x);
eigenvals	Valeurs propres, chacune avec son ordre de multiplicité . Mais Maple ne trouve pas nécessairement toutes les valeurs propres... Il vaut mieux factoriser d'abord le polynôme caractéristique, en ayant au besoin d'abord cherché les zéros avec un `solve`.	> eigenvals(A);
eigenvects	Valeurs propres, ordre de multiplicité et base de chaque sous-espace propre.	> eigenvects(A);

50. Graphiques

Le package « plots » doit, le plus souvent, être chargé auparavent : > with(plots);
Si on sélectionne le graphique à l'écran, Maple fournit une barre d'outils adaptée.

50.1. Courbes du plan

plot *option* scaling constrained	Tracé de courbes en cartésiennes, {...} permet de tracer plusieurs courbes sur un même graphe.	> plot(x^2,x=-2..2); > plot(x^2,x=-2..2, scaling=constrained); > plot({x^2,2*x+1},x=-2..2);
plot([...],...) *option* scaling constrained	Tracé de courbes en paramétriques, {...} permet de tracer plusieurs courbes sur un même graphe.	> plot([u/(1+u),1/(1-u),u=-3..3], x=-5..5,y=-5..5);
plot *option* coords polar	Tracé de courbes en polaires, {...} permet de tracer plusieurs courbes sur un même graphe.	> plot(sin(t)/(1+cos(t)),t=0..Pi, coords=polar,x=-5..5,y=-5..5);
implicitplot	Tracé de lignes de niveau : $f(x,y) = 0$.	> implicitplot(x*x+y*y=3, x=-2..2,y=-2..2);

50.2. Surfaces

plot3d	Tracé de surfaces en coordonnées cartésiennes : $z = f(x,y)$.	> plot3d(1/(x^2+y^2), x=-2..2,y=-2..2);
plot3d([...],...)	Tracé de nappes paramétrées.	> x:=cos(u)*cosh(v); > y:=sin(u)*cosh(v); > z:=sinh(v); > plot3d([x,y,z],u=0..6.3,v=-2..2);
plot3d *option* coords cylindrical	Tracé de nappes paramétrées en coordonnées cylindriques, ρ défini en fonction de θ et z.	> plot3d(sin(z),theta=0..6.3, z=0..2,coords=cylindrical);
plot3d *option* coords spherical	Tracé de nappes paramétrées en coordonnées sphériques, ρ défini en fonction de θ et φ.	> plot3d(1, theta=0..6.3,phi=0..1.58, coords=spherical);
implicitplot3d	Tracé de surfaces définies par une équation implicite $f(x,y,z) = 0$.	> implicitplot3d(x*x+y*y-z*z=1, x=-2..2,y=-2..2,z=-2..2);

50.3. Courbes de l'espace

spacecurve	Tracé d'une courbe dans l'espace.	> spacecurve([cos(t),sin(t),t], t=0..15);

50.4. Tracé simultané de plusieurs courbes ou surfaces

En 2-D ou en 3-D, deux cas se présentent à chaque fois selon qu'on a à faire au même type de graphique ou non.
En 2-D, on peut associer des courbes définies en cartésiennes, polaires, paramétriques ou de façon implicite et en 3-D, on peut associer des surfaces ou courbes définies en paramétriques, cylindriques, sphériques ou des surfaces définies de façon implicite.

- Même type de graphiques : il suffit de placer les différentes expressions à tracer entre accolades {...}
- Types de graphiques différents :

display	Tracé simultané de plusieurs graphiques plans.	> A:=plot(...);B:=plot(...); > display([A,B], scaling=constrained);
display3d	Tracé simultané de plusieurs graphiques de l'espace.	> A:=plot3d(...); > B:=plot3d(...); > display3d([A,B], scaling=constrained);

51. Structures de contrôle et procédures

Ces structures de contrôle, répétitives ou alternatives sont le plus souvent utilisées dans le corps des procédures.
On verra dans la suite, page suivante, des exemples détaillés de procédures utilisant ces structures.

51.1. Structure alternative

if *condition* then *instructions* else *instructions* fi	Structure alternative : si la condition est réalisée, on effectue les commandes après le `then`, sinon, celles après le `else`. Le `else` est d'ailleurs optionnel et le `fi` termine toujours le `if`.	> if u=0 then y:=1 else y:=sin(u)/u fi;

51.2. Structure répétitive

for *variable* from *début* by *pas* to *fin* do *instructions* od	Les instructions entre `do` et `od` sont éxécutées pour toutes les valeurs de la variable, depuis le début jusque la fin, en utilisant le pas donné. On étudie ici la suite récurrente $u_{n+1} = u_n + \frac{n}{u_n}$.	> u:=1;n:=10; > for i from 1 to n do u:=(u+i/u) od;
while *condition* do *instructions* od	Les instructions entre `do` et `od` sont éxécutées tant que la condition est vérifiée. Ici, dans une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, on s'arrête quand deux termes consécutifs sont proches à 10^{-5} près.	> u:=1; > v:=f(u); > while abs(u-v)> 10^-5 do u:=v;v:=f(v) od; > u,v;
for *variable* from *début* by *pas* to *fin* while *condition* do *instructions* od	Les instructions entre `do` et `od` sont exécutées pour toutes les valeurs de la variable, depuis le début jusque la fin, en utilisant le pas donné, tant que la condition est vérifiée. L'exemple est le même que ci-dessus, mais on s'interdit plus de 100 itérations.	> u:=1; > v:=f(u); > to 100 while abs(u-v)> 10^-5 do u:=v;v:=f(v) od; > u,v;

Dans tous les cas, on peut omettre :

- `for`, si on n'a besoin de la valeur de l'indice,
- `from`, si la valeur de début est 1,
- `by`, si le pas est 1,
- `to` ou `while`, mais pas les deux !...

51.3. Procédures

`->`	Définition d'une procédure ou fonction simple.	> f:=x->x**2*sin(x);

proc(*param*)
local *variables*;
instructions
end
	Définition d'une procédure de paramètres *param* donnés. Le résultat de la procédure est le dernier résultat calculé.
	Ici, on écrit une procédure appelée suite qui calcule u_n pour une suite définie par $u_0 = a$ et par la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{u_n + \frac{1}{u_n}}{2}$.
		> suite:=proc(a,n)
		local u; u:=a;
		from 1 to n do
		u:=(u+1/u)/2 od
		u
		end;

Quand on écrit une procédure, il importe de bien distinguer :

- les variables Maple utilisées
- et leur sens mathématique.

52. Exemples de Programmes

Notons qu'aucun des programmes donnés ici en exemple n'est « protégé » contre une mauvaise utilisation avec des paramètres non pertinents...

52.1. Un programme très simple

On va maintenant créer une procédure qui calcule, pour un terme donné u_n, le terme suivant de la suite u_{n+1} défini par : $u_{n+1} = \dfrac{u_n + \dfrac{a}{u_n}}{2}$.
On a donc deux paramètres : le terme donné de la suite, appelé u dans la procédure, et a.

```
suivant := proc(u, a)
local v ;
  v := u ;
  v := 1/2 * v + 1/2 * a/v ;
  v
end proc
```

52.2. Structure alternative

On va écrire une procédure qui calcule, pour une expression usuelle du second degré $ax^2 + bx + c$ à coefficients réels, le nombre de ses racines réelles. On a donc trois paramètres a,b,c.

```
nbrac := proc(a, b, c)
local Δ, n ;
  Δ := b^2 - 4 * a * c ;
  if 0 < Δ then n := 2 else if Δ = 0 then n := 1 else n := 0 end if end if ;
  n
end proc
```

52.3. Structure itérative « pour » à nombre de pas connu

Ecrivons une procédure qui, pour la même suite qu'au 52.1., calcule, en calcul approché « flottant » , u_n pour u_0, n et a paramètres donnés, que dans la procédure, on appelera respactivement : u,n,a.

```
suitef := proc(u, a, n)
local i, v ;
  v := evalf(u) ;
  for i to n do v := suivant(v, a) end do ;
  v
end proc
```

52.4. Structure itérative « tant que » à nombre de pas inconnu

Il s'agit ici d'étudier le comportement des suites définies par :

- $u_0 = 0.1$,
- et la relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$,
- où $f(x) = 4\,a\,x(1-x)$.

Ecrire une procédure de paramètres a et n qui calcule u_n.

```
suite := proc(a, n)
local u ;
  u := .1 ;
  to n do u := 4 * a * u * (1 - u) end do ;
  u
end proc
```

Ecrire maintenant une procédure qui calcule le premier n tel que $|u_{n+1} - u_n| \leqslant d$, de paramètres a et d, limitée à 500 itérations en cas de divergence ou de convergence très lente ...
En sortie, on donnera n,u_n,u_{n+1} pour voir s'il semble y avoir convergence ou non.
Mathématiquement, l'observation de ces suites ne prouve ni leur convergence, ni leur divergence.

```
rang := proc(a, d)
local i, u, v ;
  u := .1 ;
  v := 4 * a * u * (1 - u) ;
  for i to 500 while d < abs(u - v) do u := v ; v := 4 * a * u * (1 - u) end do ;
  i, u, v
end proc
```

52.5. Récurrence sur plusieurs rangs

On considère la suite de polynômes définie par :

- $P_0(x) = 1$
- $P_1(x) = x$
- $P_{n+2}(x) = x\,P_{n+1}(x) + P_n(x)$ pour n entier naturel

Ecrire une procédure de paramètre n, qui calcule de façon réduite et ordonnée P_n.

```
poly := proc(n)
local u, v, w ;
  u := 1 ; v := x ;
  from 2 to n do w := expand(x * v + u, x) ; u := v ; v := w end do ;
  v
end proc
```

On remarquera le « `from 2` » qui traduit simplement le fait que le premier polynôme qu'on calcule effectivement est P_2.

52.6. Un exemple en algèbre linéaire

On a bien sur déjà chargé le package `linalg`.
On prend ici une matrice A qui possède 3 valeurs propres simples : 1, 4 et 7.
On constitue la suite de vecteurs définie par un pemier vecteur X_0 et la relation : $X_{n+1} = \dfrac{A\,X_n}{\|A\,X_n\|}$.
On a donc une suite de vecteurs normés, sauf éventuellement le premier.
Quand cette suite converge, elle converge vers un vecteur propre, correspondant le plus souvent à la plus grande valeur propre en valeur absolue.

On a la matrice A et le vecteur de départ :

$$A := \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$
$$X := [1, 1, 1]$$

On écrit donc une procédure à 2 paramètres A et X qui calcule la suite X_n jusqu'à ce que la norme de la différence de 2 vecteurs consécutifs soit assez petite.
Le nombre d'itérations est limité et on travaille bien sûr en « flottant » .
Ce qui donne :

```
valprop := proc(A, X)
local Y, Z;
  Y := evalf(evalm(eval(X)));
  Z := evalf(evalm(A &* Y/norm(A &* Y, 2)));
  to 30 while .00001 < norm(evalm(Z - Y), 2) do
    Y := evalm(Z);
    Z := evalf(evalm(A &* Y/norm(A &* Y, 2)))
  end do;
  evalf(norm(evalm('&*'(A, Z)), 2))
end proc
```

On essaye cette procédure :

```
> valprop(A,X);

    6.999999999
```

Index

A

abscisse curviligne 78
aire 44, 50, 69
algèbre 11
— exemples 11
— sous-algèbre 11
angles 69
anneau 10
— exemples 10
— sous-anneau 10
application 8
— bijective 8
— composition des – 9
— injective 8
— réciproque 8
— surjective 8
application linéaire 18
— bijective 19
— endomorphisme 18
— image d'une – 18
— image réciproque d'une – 18
— injective 18
— matrice d'une – 19
– changement de base 21
— rang 19
associativité 7
automorphisme 18

B

barycentre 67
base d'un espace vectoriel 17
bijection 8, 19
binôme (formule du) 12

C

cardinal 8
cercles
— dans l'espace 82
— dans le plan 82
– cocyclicité 82
changement de variable 46, 48, 51, 53
Chasles (relation de) 44
coefficients binomiaux 12
commutativité 7
cônes 91
— de révolution 93
coniques 83–86
— en polaires 83, 85
— identification 85
continuité 30, 61
contour apparent 91, 92
convergence 56
— d'une intégrale généralisée 47
— d'une série de Fourier 59
— d'une série entière 56
corps 11
— exemples 11
courbes
— centre de symétrie 74
— convexité 74
— de l'espace 81
— en cartésiennes 73
— en paramétriques 74
— en polaires 76
courbure 78
— centre de – 79
— en paramétriques 79
— en polaires 79
— pour la valeur 0 du paramètre 80
critère
— d'équivalence 47, 54
— de comparaison 47, 53
— de d'Alembert 54
— des séries alternées 54
croissances comparées 31
cylindres 90
— de révolution 93
cylindriques 51

D

dérivée
— d'un produit 32
— d'une composée 32
dérivabilité 32
déterminant 22, 67, 69
— d'un produit de matrices 22
— d'une matrice triangulaire 22
– par blocs 22
— ordre 2 et 3 22
— ordre quelconque 22
développement
— limité 34
diagonalisiblilité 23
— cond. nécessaire et suffisante 23
— condition suffisante 23
dichotomie 33
distances 69
diviseur 10
division euclidienne 10, 15
droites
— de l'espace affine 69
— du plan affine 68

E

élément
— inversible 7
— neutre 7
ellipses 83
ellipsoïde 87
endomorphisme 18
— noyau 23
— orthogonal 27
— stabilité par – 18
— symétrique 25
ensemble 7
— de définition 29
— fini 8
équations différentielles 63–65
— aux dérivées partielles 65
— linéaires 63
– du premier ordre 64
– du second ordre 64
— non linéaires 64
— recollement de solutions 63
espace vectoriel 16
— base d'un – 17
— de dimension finie 17
— euclidien 25
— exemples 17
— préhilbertien 25
— somme de – 16
— somme directe de – 16
— sous-espace 16
— supplémentaires 16, 17, 70

F

famille
— génératrice 17
— libre 17
faux problème 47
fonction 8
— classe $\mathscr{C}^n$ 32
— continue 30
– parmorceaux 31
— convexe 74
— définie par une intégrale
– généralisée 48, 49
– simple 46
— dérivable 32
— de plusieurs variables 61–63
– extrémums 62
— en escalier 31
— limite d'une – 30
— monotone 29
— usuelle 35
— variations d'une – 30
forme linéaire 18
formes indéterminées 31
fractions rationnelles 15
— déc. en éléments simples 15–16
Frenet (repère de) 78

G

groupe 9
— linéaire 27
— morphisme de – 9
— orthogonal 27
— sous-groupe 9

H

homomorphisme 18
hyperboles 85
hyperboloïde
— à deux nappes 87
— à une nappe 87

I

inégalité
— dans les intégrales 44
— de Schwarz 25, 44, 46
— de Taylor-Lagrange 33
— des accroissements finis 33
— triangulaire 13, 25
injection 8, 18
intégrale
— double et triple 49–53
— généralisée 47–49
— simple 44–47
intégration
— de séries 60
— par parties 46, 48
isométries 70–72
— affines
– de l'espace 72
– du plan 72
— vectorielles

– de l'espace 71
– du plan 71
isomorphisme 18

J

jacobien 63

L

limites usuelles 31
loi de composition interne 7

M

maple 94–103
— `changevar` 97
— `charpoly` 98
— `collect` 95
— `combine` 95
— comparaisons 94
— constantes 94
— `convert` 95
— `diff` 97
— `display` 99
— `dsolve` 97
— `eigenvals` 98
— `eigenvects` 98
— ensemble 96
— `eval` 95
— `evalb` 95
— `evalm` 94, 95
— `expand` 95
— `factor` 95
— fonctions usuelles 96
— `for` 100, 101
— `fsolve` 97
— `GramSchmidt` 98
— `if` 99, 101
— `int` 97
— intervalle 96
— `intparts` 97
— `leadterm` 96
— `limit` 96
— `linalg` 97
— `linsolve` 97
— liste 96
— `matrix` 98
— `norm` 97
— `normal` 96
— opérations
– sur les matrices 94
– usuelles 94
— `parfrac` 95
— `plot` 98
— `plot3d` 99
— `proc` 100–103
— `product` 95
— `series` 96
— `simplify` 96
— `solve` 97
— `sort` 95
— `spacecurve` 99
— `subs` 95
— `sum` 95
— `vector` 97
— `while` 100, 101
matrice
— de passage 21
— jacobienne 62
— orthogonale 27
— puissance de – 24
— symétrique 25
moindres carrés (méthode des) 26
moyenne (formule de) 44
multiple 10

N

Newton-Raphson (théorème de) 33
nombre premier 10
nombres complexes
— racines
– $n^{èmes}$ 13
– carrées 13
norme 17
— euclidienne 25

P

paraboles 84
paraboloïde
— elliptique 87
— hyperbolique 87
Parseval (formule de) 59
partie entière 10, 12
plans
— de l'espace affine 68
point critique 62
polaires 51
polynôme
— caractéristique 23
— divisibilité 14
— division euclidienne 15
— factorisation 14
— racines d'un – 14
— scindé 14, 23
primitives 43–44
— existence 44
— fraction rationnelle 43
– en exponentielle 43
– en radicaux 43
– trigonométrique 44
— polynôme et exponentielle 44
— usuelles 44
produit scalaire 24, 67
— dans une base orthonormale 25
produit vectoriel 67, 69, 70
projecteur 19, 26, 70
projection
— orthogonale 26

Q

quadriques 87–89
— équations réduites 87
— identification 89

R

rang 17
— théorème du – 19
rayon de courbure 78
Rolle (théorème de) 33
rotations
— vectorielles
– de l'espace 71, 72
– du plan 71

S

séries
— d'intégrales 60
— de Fourier 57–60
– coefficients 59
– convergence 59
— entières 55–57, 60
– développements usuels 57
– rayon de convergence 56
— géométriques 53
— numériques 53–55
— somme de – 55
Schmidt (procédé de –) 25
Schwarz (théoreme de) 62
semblables 21
similitude 72
somme de Riemann 46
sous-espace propre 23
sphériques 52
sphères 82
suite 28
— équivalentes 28
— adjacentes 29
— bornée 28
— convergente 28
— croissante majorée 29
— et série 28
— limite d'une – 28
— récurrente 29
– linéaire 29
— sous-suite 28
— vectorielle 28
surfaces 87–93
— de révolution 89
— plan tangent 80
surjection 8
symétries 70
— centrales 71
— orthogonales 70–72
systèmes
— différentiels 65
– autonomes 66
— linéaires 19

T

Taylor
— -Young 33
— avec reste intégral 33
transposée 20
triangularisation 23
trigonométrie 40–43
— arc double 42
— fonctions réciproques 43
— formule de Moivre 43
— produits en sommes 42
— sommes d'arcs 42
— sommes en produits 43
— symétries 42
trois conditions (théorème des) 46, 48

V

valeur propre 23
valeurs intermédiaires (th. des –) 30
vecteur propre 23
vissage 72

volume 50, 69 Z zéro d'une fonction 33